Geometrie I

Co je dobré znát ke zkoušce

Základní idea předmětu Geometrie I

Předmět Geometrie I neobsahuje mnoho nového, jedná se o:

- opakování ze střední školy (značně se překrývá s pěknou učebnicí Analytická geometrie[1] ze série *Matematika pro gymnázia*),
- stručné shrnutí analytické metody s využitím lineární algebry.

Je tedy dobrý nápad:

- vše si porovnávat s učebnicí Analytická geometrie ze série *Matematika pro gymnázia*,
- důkladně si zopakovat lineární algebru.

Připravujeme se a dráhu učitele matematiky, a tak se nežádá pouze „nějaké" zvládnutí látky, ale uchopení látky z pohledu středoškolského učitele. Základní myšlenkou je: čistou matematiku pěstovat tak, aby byla jednotlivá témata snadno transformovatelná do výuky na střední škole. Formulace jsou tedy sice vysokoškolské (s využitím lineární algebry), vše by však mělo být snadno přeformulovatelné do podoby použitelné přímo při výuce na střední škole.

Důraz je kladen na porozumění – je nutné znát motivace, tj. proč jsou jednotlivé pojmy zaváděny a proč právě takto. Je tedy třeba vědět, proč odvozujeme právě tyto vlastnosti – k čemu jsou potřeba a jakou hrají v celé teorii roli. *Typický postup při zavádění nového pojmu je:*

- *formulace základního problému,*
- *řešení základního problému,*
- *definice nového pojmu, který vzešel z řešení problému.*

Následuje hledání odpovědí na základní otázky:

- *jak takový objekt najít (např. u vzdálenosti dvou podprostorů průsečíky s osou),*
- *lze-li jej hledat ve speciálních případech (např. vzdálenost bodu od podprostoru, bodu od nadroviny, …),*
- *má-li nějaké významné vlastnosti (např. „transferová" věta, …),*
- *souvislosti (výpočet vzdálenosti pomocí Gramova determinantu či pomocí parc. derivací).*

Příkladem může být také zavedení skalárního součinu. Nestačí vědět, že skalární součin je zkrátka symetrická pozitivně definitní bilineární forma. Je nutno vědět, proč byl zaveden, jakou roli v analytické geometrii má (chceme budovat metrickou geometrii), znát základní problém, který vedl k jeho zavedení (základní úlohy metrické geometrie: vzdálenost 2 bodů, úhel dvou vektorů), tento problém je třeba vyřešit (aplikací Pýthagorovy, resp. kosinové věty), a tím odvodit jeho tvar ve speciálním tvaru. Tento výraz pak zobecnit na standardní obecnou definici – symetrickou pozitivně definitní bilineární formu.

[1] Boček L., Kočandrle M.: Analytická geometrie. Série Matematika pro gymnázia. Prometheus, Praha, 2008.

Osnova předmětu

I. Geometrie v afinním prostoru

Zavedení afinního prostoru

Proč jsou jednotlivé axiomy zavedeny právě takto? Uveďte nějaké netriviální příklady afinního prostoru. Definujte bod; afinní přímku, afinní rovinu, afinní nadrovinu. Odvoďte základní vlastnosti zobrazení $f : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to V_n$, ukažte, že se toto zobrazení chová jako odčítání.

Lineární soustava souřadnic

Základní problém vedoucí k zavedení LSS, odvození předpisu LSS vzhledem k danému repéru, bijektivnost a homomorfnost LSS. Určenost LSS (k dané LSS najít repér a naopak). Souřadnice bodu a vektoru: odvození. Poznámka k nelineárním soustavám souřadnic.

Transformace LSS

Základní definice: matice přechodu, matice homomorfismu vzhledem k daným bázím, souřadnice vektoru. Přechod od změny báze ve vektorovém prostoru k transformaci LSS. Afinní matice přechodu, její vlastnosti (součin matic a matice inverzní).

Lineární kombinace bodů

Základní problém, motivace; geometrická vlastnost. Rozborem výchozího problému zjistit, že existují právě dvě možnosti, jak lineární kombinaci bodů interpretovat (bod a vektor) a za jakých podmínek to je možné. Souřadnice lineární kombinace bodů. Souřadnice středu úsečky a těžiště trojúhelníku. Lineární nezávislost bodů: motivace, aplikace (určenost podprostoru dimenze k pomocí $k + 1$ LNZ bodů).

Podprostory afinního prostoru

Definice podprostoru a její rozbor (zdůvodnění podmínek v ní obsažených). Určenost podprostoru (kterýmkoli svým bodem a zaměřením).

Parametrické vyjádření podprostoru afinního prostoru

Odvození.

Vzájemná poloha podprostorů afinního prostoru

Kompletní klasifikace, základní myšlenka klasifikace. Charakterizace jednotlivých případů. Vyšetřování vzájemné polohy pomocí hodností matic, určení minimální dimenze prostoru, v němž mohou být zadané podprostory různoběžné, mimoběžné, …

Spojení podprostorů afinního prostoru

Definice, příklady, základní vlastnosti spojení.

Příčka dvou mimoběžek

Hledání příčky vedené daným směrem a daným bodem; rovnice, podmínky existence.

Obecná rovnice nadroviny

Věta o hodnosti a defektu homomorfismu, zaměření nadroviny jako jádro nenulové lineární formy, odvození obecné rovnice nadroviny, odvození tvaru v konkrétní LSS. Otázka jednoznačnosti, úloha nalézt k zadanému bodu a zaměření nadroviny její obecnou rovnici a naopak; korektnost: nezávislost na volbě bodu nadroviny. Převod obecné rovnice na parametrické vyjádření a naopak. Vyjádření obecné rovnice nadroviny pomocí determinantu.

Vyjádření podprostoru rovnicemi – obecné rovnice podprostorů

Podprostor jako průnik nadrovin, vyjádření podprostoru pomocí soustavy lineárních rovnic, dimenze podprostoru takto určeného v závislosti na hodnosti soustavy rovnic, existence (Frobeniova věta a její geometrická interpretace). Převod obecné rovnice na parametrické vyjádření a naopak. Hledání rovnice přímky v rovině i rovnic v prostoru, hledání rovnice roviny v prostoru.

Orientace afinního prostoru
Orientace afinního prostoru jako orientace jeho zaměření. Orientace vektorového prostoru: základní myšlenka, porovnávání dvou bází pomocí matice přechodu a jejího determinantu, relace ekvivalence „být souhlasné“ na množině všech bází daného vektorového prostoru, třídy ekvivalence, definice orientace vektorového prostoru. Kladné a záporné báze.

II. Geometrie v eukleidovském prostoru

Skalární součin
Základní úlohy metrické geometrie (vzdálenost dvou bodů – velikost vektoru, úhel vektorů) a jejich řešení analytickou metodou (pomocí souřadnic). Odvození vztahu $u_1v_1 + u_2v_2 = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\varphi$, prozkoumání výrazu na levé straně: distributivita, komutativita, zdůvodnění názvu *skalární součin*, zdůvodnění značení pomocí tečky. Geometrická interpretace skalárního součinu, charakterizace kolmosti.

Aplikace skalárního součinu
Eukleidovské odvození obecné rovnice nadroviny, středoškolské odvození, tvar rovnice ve zvolené LSS. Uvědomění si matematického základu odvození obecné rovnice nadroviny: věta o dimenzi ortogonálního doplňku (aplikace na jednorozměrný podprostor).

Vzdálenost bodu od nadroviny – odvození pomocí geometrické interpretace skalárního součinu.

Determinant a vnější součin
Geometrická interpretace determinantu (v případě řádků obsahujících souřadnice vektorů vzhledem ke kladné ortonormální bázi), odvození ve 2D. Vnější součin: definice a její korektnost (nezávislost na volbě kladné ON báze), geometrická interpretace vnějšího součinu, rozdíl mezi vnějším součinem a determinantem. Vlastnosti vnějšího součinu – odvození na základě vlastností determinantů. Druhá mocnina vnějšího součinu je rovna příslušnému Gramovu determinantu.

Vektorový součin
Hledání vektoru kolmého ke dvěma LNZ vektorům ve 3D, vyjádření souřadnic pomocí determinantů, zápis vektorového součinu pomocí jediného formálního determinantu. Prozkoumání vzniklé operace: distributivita, antikomutativita.

Odstranění nekorektnosti zápisu vektorového součinu pomocí formálního determinantu při zachování výhod kompaktního tvaru: obecná definice vektorového součinu pomocí součinu vnějšího a skalárního, znázornění geometrického významu této definice, základní věta; ověření, že takto definovaný vektorový součin splňuje podmínky ze středoškolské definice (kolmost, velikost rovná obsahu rovnoběžníku, orientace). Odvození vlastností (tj. jak se s ním počítá) vektorového součinu z vlastností determinantu.

Fyzikální motivace pro zavedení vektorového součinu: otáčivý účinek síly, moment síly vzhledem k ose otáčení; přirozený vznik podmínek definujících vektorový součin známých ze SŠ (kolmost, velikost rovná obsahu rovnoběžníku, orientace).

Eukleidovský prostor
Definice.

Vzdálenost dvou podprostorů – obecně
Obecná definice vzdálenosti dvou podprostorů, obecná věta o vzdálenosti dvou podprostorů a její důkaz pomocí dvou lémmat (důkaz minimality, nalezení minima).

Gramův determinant a jeho aplikace
Motivace – viz vnější součin. Gramův determinant, geometrická interpretace jeho druhé odmocni-

ny (objem k-rozměrného rovnoběžnostěnu v n-rozměrném prostoru), výpočet obsahu rovnoběžníku pomocí Gramova determinantu. Výpočet vzdálenosti dvou podprostorů pomocí Gramova determinantu: a) odvození hledáním minima pomocí parciálních derivací, b) ideové „odvození“ pomocí geometrické interpretace Gramova determinantu.

Transferová věta
Znění, odvození na základě vzorce pro výpočet vzdálenosti dvou podprostorů pomocí Gramova determinantu, ideové odvození pro případ dvou mimoběžek na základě geometrické představy. Aplikace transferové věty na transformaci úloh na vzdálenosti podprostorů.

Vzdálenost dvou podprostorů – speciální případy
Vzdálenost bodu od podprostoru: ortogonální projekce bodu do podprostoru, důkaz minimality vzdálenosti ortogonální projekce (důkaz, že „po kolmici je to nejblíže“), význam Pýthagorovy věty. Aplikace na vzdálenost bodu od nadroviny: výpočet pomocí ortogonální projekce, porovnání s odvozením pomocí geometrické interpretace skalárního součinu. Výpočet vzdálenosti bodu od nadroviny pomocí Gramova determinantu.

Osa dvou mimoběžek, hledání vzdálenosti dvou mimoběžek pomocí jejich osy. Osa dvou mimoběžných podprostorů.

Odchylka přímek a nadrovin
Odchylka dvou přímek: geometrická představa, odvození absolutní hodnoty ve vztahu pro $\varphi(p, q)$. Rozdíl mezi úhlem dvou vektorů a odchylkou dvou přímek, odchylka jako číslo z intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Odchylka dvou nadrovin a odchylka přímky od nadroviny: ideová odvození.

Odchylka dvou podprostorů
Odchylka přímky od podprostoru obecně, odvození pomocí ortogonální projekce.

Odchylka dvou podprostorů eukleidovského prostoru obecně, definice pomocí definice odchylky dvou podprostorů vektorového prostoru. Obecná definice odchylky dvou podprostorů vektorového prostoru.

Kolmost dvou podprostorů
Definice ortogonálního doplňku podprostoru vektorového prostoru. Kolmost dvou vektorových podprostorů: definice a formální asymetričnost klíčové podmínky. Kolmé podprostory mohou mít netriviální průnik – ukázání na příkladu dvou vektorových rovin, kolmost dvou podprostorů neznamená kolmost každého vektoru jednoho podprostoru na každý vektor druhého podprostoru – protipříklad.