

afinní zobr. $f: f(X) = AX + B$

tj.

$$\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases}$$

tj.: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

f prosté (\Leftrightarrow) $\det A \neq 0$

samodružné body: $X = AX + B$, tj. $(E - A)X = B$

samodružné směry (tj. vlastní vektory): $X = \lambda X + B$ tj. $(A - \lambda E)\vec{u} = \vec{0}$
 $\exists \lambda \neq 0$; $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$

λ kořenem $\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$

$$D = (a+d)^2 - 4(ad - bc) = a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4bc = (a-d)^2 + 4bc$$

$D > 0 \Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ 2 různé samodr. směry

LSS lze zvolit tak, že \nearrow splývají se směry os x, y

tj. vlastní vektory jsou $(1, 0)$, $(0, 1)$ $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

samodružné body: $X = AX + B$, tj. $(E - A)X = B$ v našem případě: $\left(\begin{array}{cc|c} 1-\lambda_1 & 0 & p \\ 0 & 1-\lambda_2 & q \end{array} \right)$

a) $\lambda_1 \neq 1$
 $\lambda_2 \neq 1 \Rightarrow$ afinita f nemá $\exists!$ samodr. bod

zvolme jej za počátek, tj. $X_0 = [0, 0] \Rightarrow p = q = 0$

$$f(X) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} X, \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \neq 1, \lambda_2 \neq 1$$

b) $\lambda_1 = 1$
 $\lambda_2 \neq 1$ samodr. body: $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & p \\ 0 & 1-\lambda_2 & q \end{array} \right)$

$p = 0 \Rightarrow$ přímka samodr. bodů $y = \frac{q}{1-\lambda_2}$

zvolme počátek na této přímce $\Rightarrow q = 0$ $f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} X$

$p \neq 0 \Rightarrow$ soustava NR \Rightarrow neex. samodr. bod

$$f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

2 samodr. směry

samodr. přímky?

$\vec{x} = (r, p)$ přímka $X = r$ se zobr. na $X \neq r + p$ není samodr.

$\vec{u}_2 = (0, 1)$: přímka $y = r$ se zobr. na $y = \lambda_2 r + q$

tj. \exists samodružná přímka pro r ; zvolíme-li počátek na této samodr. přímce $r = \lambda_2 r + q$, tj. $r = \frac{q}{1-\lambda_2}$
 $y = \frac{q}{1-\lambda_2}$, tak $q = 0$

$$f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} p \neq 0, \lambda_2 \neq 1, \lambda_1 = 1$$

$D = 0$ $A = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

samodružný směr, zvolme LSS, aby to byl směr osy $x \Rightarrow A\vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

\exists alespoň 1

$$a = \lambda \quad c = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$D = 0: (a-d)^2 + 4bc = 0 \Rightarrow a = d = \lambda$$

$b = 0$ $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ každý směr samodružný $\Rightarrow f$ homothetie
 $(A - \lambda E) = 0$

samodr. body: $\left(\begin{array}{cc|c} 1-\lambda & 0 & p \\ 0 & 1-\lambda & q \end{array} \right)$

$\lambda = 1$ posunutí o $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ $p = 0 = q$ - identita
 translace $f(X) = EX$

$$f(X) = EX + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \text{ alespoň } 1 \geq p, q \neq 0$$

$\lambda \neq 1 \Rightarrow \exists!$ samodr. bod, zvolme jej za počátek
 stejnolehlost $f(X) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} X$

$D=0, b \neq 0, A = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \neq 0$

$\exists!$ samodr. směr - směr osy x

samodr. body: $\begin{pmatrix} 1-\lambda & -b \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \lambda = \begin{cases} 1 \\ \neq 1 \end{cases}$

$\lambda = 1 \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

$q \neq 0$ nemá samodr. bod

restrikce afinity f na přímku $y = -\frac{p}{b}$ je posunutí o q

počátek zvolme na přímce $y = -\frac{p}{b}$ pak $p=0$

ve směru osy y

$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}$

$q=0$

$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$

afinita f má celou přímku samodružných bodů $y = -\frac{p}{b}$

zvolme na ní počátek $\Rightarrow p=0$

$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$ eláce

$J = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$f(x) = J \cdot x$

eláce: osa x přímka samodr. bodů

na hladině C posune o C

tj. Bod $B = [0, c] \mapsto [c, c]$

$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

afinita

$\exists!$ samodr. bod 1 samodr. směr

$D < 0$ char. rov. nemá reálný kořen \Rightarrow neex. samodr. směr

samodr. bod: $(E-A)x = B, \lambda \neq 1, \text{protože } \lambda \notin \mathbb{R} \Rightarrow \exists! \text{ řeš. - samodr. bod}$

$\lambda = \lambda_1 \pm \lambda_2 i$

zvolme jej za počátek LSS

samodr. směry neex. v \mathbb{R} , ale: $A \vec{u} = \lambda \vec{u}, \forall \mathbb{C}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 + i u_2 \\ v_1 + i v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda_1 + i \lambda_2) \cdot (u_1 + i u_2) \\ (\lambda_1 + i \lambda_2) \cdot (v_1 + i v_2) \end{pmatrix}$

$A \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2 \\ \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 \end{pmatrix}$ a $iA \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = i \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 u_2 + \lambda_2 u_1 \\ \lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_1 \end{pmatrix}$

$\vec{w}_1 = (u_1, v_1), \vec{w}_2 = (u_2, v_2)$

$A \vec{w}_1 = \lambda_1 \vec{w}_1 - \lambda_2 \vec{w}_2$ a $A \vec{w}_2 = \lambda_1 \vec{w}_2 + \lambda_2 \vec{w}_1$

jsou LNŽ, jinak by byly alespoň 1 z nich vlastními vektorem - spor reál. v l. vektor neex. a oba nenulové

LSS: za směry os vezmeme směry vektorů \vec{w}_1 a \vec{w}_2

$\Rightarrow f(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} x, \lambda_2 \neq 0$

	Žádný samodružný směr	Jeden samodružný směr	Dva samodružné směry	Každý směr je samodružný
Žádný samodružný bod	—	$x' = x + by$ $y' = y + q$ $bq \neq 0$	$x' = x + p$ $y' = \lambda_2 y$ $p \neq 0 \neq \lambda_2 \neq 1$	$x' = x + p$ $y' = y + q$ $(p, q) \neq (0, 0)$ posunutí, ne identita
Jeden samodružný bod	$x' = \lambda_1 x + \lambda_2 y$ $y' = -\lambda_2 x + \lambda_1 y$ $\lambda_2 \neq 0$	$x' = \lambda_1 x + by$ $y' = \lambda_1 y$ $b \neq 0 \neq \lambda_1 \neq 1$	$x' = \lambda_1 x$ $y' = \lambda_2 y$ $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2 \neq \lambda_1$ $\lambda_1 \neq 1 \neq \lambda_2$	$x' = \lambda_1 x$ $y' = \lambda_1 y$ $\lambda_1 \neq 0, \lambda_1 \neq 1$ stejnolehlost
Přímka samodružných bodů	—	$x' = x + by$ $y' = y$ $b \neq 0$ elace	$x' = x$ $y' = \lambda_2 y$ $0 \neq \lambda_2 \neq 1$ osová afinita, ne elace	—
Všechny body samodružné	—	—	—	$x' = x$ $y' = y$ identita