LOGARITMY

Zdeněk Halas

Na střední škole je logaritmická funkce definována jako funkce inverzní k funkci exponenciální. Zápis

$$\log_a x = y$$

je tedy pro všechna kladná x a pro každé kladné $a \neq 1$ ekvivalentní vztahu $x = a^y$. Přímo z této definice pak snadno plynou základní vlastnosti logaritmické funkce, například

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

pro všechna kladná x, y a pro každé kladné $a \neq 1$.

Původně však logaritmy vznikly jako nástroj pro zjednodušení výpočtů. V této kapitole se pokusíme naznačit odpověď na otázku, jak byly počítány první tabulky logaritmů. Odtud také vyplyne, jak vznikl samotný termín *logaritmus*.

Dále se budeme zabývat otázkou, jak lze přímo vypočítat dekadický logaritmus zadaného čísla. Přestože se logaritmy o základu 10 mohou na první pohled zdát být naprosto přirozenou volbou, všimneme si při jejich výpočtu nepříjemného problému, který se nám podaří odstranit až volbou základu $e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\ldots$ Bude tak zřejmé, proč se logaritmus o zdánlivě komplikovaném základu, jímž je iracionální číslo e, nazývá logaritmem přirozeným.

1 Objev logaritmů

Základní myšlenkou, na níž stojí pojem logaritmu, je zjednodušit násobení a dělení tím, že se převede na sčítání, resp. odčítání.

Již před objevem logaritmů byly známy formule, které to v omezené míře umožňovaly, například

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right].$$

Objev logaritmů však učinil až John Napier z Merchistonu (1550–1617), který také v Edinburghu roku 1614 vydal jejich první skutečné tabulky *Mirifici logarithmorum canonis descriptio.* Připravil také podrobný návod *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, jak tyto tabulky sestavit, jeho vydání však plánoval až v případě, že je o tabulky zájem. Vydán byl až posmrtně roku 1619.

Napierovy tabulky našly velmi brzy hojné využití při výpočtech v různých oblastech, zejména při navigaci a v astronomii. Proto byla užitečná tabulka logaritmů hodnot funkce sinus. Původní definice logaritmu z Napierova *Constructio* je proto se sinem svázána; pro dnešního čtenáře však tato historická formulace asi nebude příliš srozumitelná, a tak ji uveďme jen na ukázku:

Logaritmus sinu je takové číslo, které velmi přesně určuje úsečku, která se zvětšovala lineárně, ve stejném čase úsečka příslušná celému sinu se zmenšovala geometricky až k zadanému sinu a každý pohyb je chápán synchronně a s týmiž počátečními rychlostmi.

Při samotném generování tabulek však Napier použil vztahu mezi aritmetickou a geometrickou posloupností.

První tabulky dekadických logaritmů (14místné) sestavil roku 1617 Henry Briggs (1561–1630): *Logarithmorum chilias prima.* Jím definované logaritmy splňovaly vztah

$$\mathrm{Log}\,(ab) = \mathrm{Log}\,a + \mathrm{Log}\,b - \mathrm{Log}\,1\,,$$

přičemž se volí $\mathrm{Log}\,1 = 0$, „aby vznikalo co nejméně problémů při výpočtech“.

Velmi brzy se ukázalo, že logaritmy jsou velmi praktické, objev se tedy brzy rozšířil po Evropě. Vydávaly se nejen samotné logaritmické tabulky, ale také návody k jejich užití, například:

- Johannes Kepler (1571–1630): *Chiliades logarithmorum* (1624),
- Denis Henrion (1580–1640): *Traité des logarithmes* (1626),
- Adrian Vlacq (1600–1667): *Arithmetica logarithmica sive logarithmorum chiliades centum* (1628), jednalo se o vylepšené Briggsovy tabulky,
- Bonaventura Cavalieri (1598–1641): *Directorium generale uranometricum in quo trigonometriae logarithmicae fundamenta* (1632), spis o aplikacích logaritmů.

2 Základní idea logaritmů

Nyní se podíváme podrobněji na ideu, která je základem logaritmů. Volně přitom navážeme na úvahy Napierovy. Předně si musíme všimnout, že násobení mocnin o stejném základu lze snadno provést pouhým sčítáním exponentů, např.

$$16 \cdot 64 = 2^4 \cdot 2^6 = 2^{4+6} = 2^{10} = 1024.$$

Pokud bychom tedy převedli všechna čísla, která chceme násobit či dělit, na mocniny o jediném zvoleném základu (třeba 2), násobení, resp. dělení, by bylo možno realizovat snadno.

Problém je, jak převést dané číslo na mocninu o zvoleném základu; je třeba nalézt příslušný exponent, jinými slovy logaritmus. Pokud je číslo (např. 8) přímo mocninou základu s kladným celým exponentem (zvolme základ 2), je situace poměrně snadná: $8 = 2^3$, tedy logaritmus čísla 8 o základu 2 je roven 3.

Velmi snadným řešením problému převodu čísel na mocniny o jediném základu tedy je počítat pouze s čísly, která jsou přímo mocninou zvoleného základu s kladným celým exponentem. Pozorujme například tabulku mocnin o základu 2:

1	2	9	512
2	4	10	1024
3	8	11	2048
4	16	12	4096
5	32	13	8192
6	64	14	16384
7	128	15	32768
8	256	16	65536

Násobení (i dělení) čísel obsažených v této tabulce je velmi snadné, např. $16 \cdot 64 = 1024$, neboť pomocí tabulky: $4 + 6 = 10$ a u exponentu 10 přímo čteme výsledek 1024.

Pro praktické počítání však tato tabulka není dostatečná, protože je příliš „řídká“. Větší základ by to ještě zhoršil, např.: $5^1 = 5$, $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, $5^4 = 625$, ...

Řešením je tedy zvolit základ velmi blízký 1, aby byla tabulka „hustší“. Např. mocniny čísla $1,001$ s celočíselným (kladným) exponentem postupně jsou:

$1,001 \quad 1,002001 \quad 1,003003001 \quad 1,004\ldots \quad 1,005\ldots \quad 1,006\ldots$
$1,007\ldots \quad 1,008\ldots \quad 1,009\ldots \quad 1,010\ldots \quad 1,011\ldots \quad 1,012\ldots$

Pokud bychom zvolili základ menší než jedna, získali bychom jeho postupným umocňováním hodnoty z intervalu $(0,1)$. To je poměrně výhodné, pokud chceme získat tabulku čísel vhodnou pro goniometrické výpočty, neboť funkce sinus i kosinus nabývají hodnot z intervalu $[-1,1]$. Ilustrujme si to na základu $1-\frac{1}{10}$; začátek tabulky s tímto základem vypadá takto:

1	0,9	13	0,2541865828329
2	0,81	14	0,22876792454961
3	0,729	15	0,205891132094649
4	0,6561	16	0,1853020188851841
5	0,59049	17	0,16677181699666569
6	0,531441	18	0,150094635296999121
7	0,4782969	19	0,1350851717672992089
8	0,43046721	20	0,12157665459056928801
9	0,387420489	21	0,109418989131512359209
10	0,3486784401	22	0,0984770902183611232881
11	0,31381059609	23	0,08862938119652501095929
12	0,282429536481	24	0,079766443076872509863361

Tabulka 1: Mocniny čísla $1-\frac{1}{10}$.

Tato tabulka je už mnohem užitečnější. Chceme-li například vypočítat součin $0,43 \cdot 0,282 = 0,12126$, stačí v tabulce najít příslušné exponenty a sečíst je: $8+12=20$, tj. součin je přibližně roven $0,121$. Získali jsme tak velmi snadno výsledek, který je poměrně přesný.

Nyní nás nijak nepřekvapí, že si John Napier při sestavování prvních tabulek logaritmů *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* zvolil za základ $1-10^{-7}$.

Nyní je zřejmá základní myšlenka, jak byly sestavovány první tabulky logaritmů. Shrňme si nejdůležitější pozorování do několika bodů.

- Místo se samotnými čísly pracujeme s *exponenty* (což jsou vlastně logaritmy).
- Je nutné mít čísla, s nimiž počítáme, převedena na mocniny o *stejném základu.*
- Tento převod přímo nepočítáme, *pouze umocňujeme* zvolený základ.
- Aby byla tabulka dostatečně „hustá“, volíme za *základ číslo velmi blízké* 1.

2.1 Samotný termín „logaritmus“

Slovo „logaritmus“ vzniklo ze složení dvou řeckých slov: *logos* (poměr) a *arithmos* (přirozené číslo, počet).

Pohlédneme-li například na tabulku 1, je zřejmé, že logaritmy o základu $1 - \frac{1}{10}$ čísel, která tvoří geometrickou posloupnost $\{1 - \frac{1}{10}\}^n$, $n \in \mathbb{N}$, tvoří vlastně aritmetickou posloupnost čísel $1, 2, \ldots$ Tabulky logaritmů tedy vzniknou spojením aritmetické a geometrické posloupnosti. Jelikož pro geometrickou posloupnost je charakteristické, že poměr každých dvou jejích sousedních členů $a_{n+1}/a_n = q$ je konstantní (touto konstantou je kvocient), je zřejmé, že *logos* odkazuje právě na tuto geometrickou posloupnost a *arithmos* na posloupnost přirozených čísel, která udávají, o kolikátý člen geometrické posloupnosti se jedná, a jsou vlastně logaritmem tohoto členu.

3 Napierovy logaritmy

Podívejme se nyní stručně na první logaritmické tabulky [Nap1], které vydal roku 1614 John Napier. Za základ si vzal číslo $1 - 10^{-7}$; vysvětlením této volby jsme se podrobně zabývali v předchozí kapitole. Pro představu vypišme několik řádků takovéto tabulky.

n	$(1 - 10^{-7})^n$
1	0,9999999
2	0,9999998 0000001
3	0,9999997 00000029999999
4	0,9999996 000000599999960000001
5	0,9999995 0000009999999000000049999999
6	0,9999994 00000149999980000001499999940000001
	...
10	0,9999990 0000044999988000002099999748000020999998800000...

A dále pro některá větší n:

100	0,9999900 0004949983830039212...
	...
7 500 000	0,4723665 3502726813056629714...
	...
10 000 000	0,3678794 2277746949660786692...
	...
100 000 000	0,0000453 999070625241319530913...
100 000 001	0,0000453 999025225334257006781...

Samotné Napierovy tabulky [Nap1] však obsahují hodnoty

$$10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^n \,,$$

aby byly všechny hodnoty celočíselné. Při jejich výpočtu by však Napier musel stále násobit základem $1 - 10^{-7} = 0,999\,999\,9$, což by však bylo velmi náročné. Na základě jednoduchých pozorování a pečlivých odhadů chyby tyto mocniny přímo počítat nemusel. Ukažme si základní princip, na němž je založeno značné ulehčení práce.

Předně pozorujme jednotlivé hodnoty pro $n = 1, \ldots, 100$. Je patrné, že postupně klesají, a to velmi pravidelně: vždy o jedničku na konci bloku prvních sedmi cifer. Za tímto naprosto pravidelně vytvořeným blokem cifer následuje blok nul, cifry za ním je možno zanedbat. Takto Napier vytvořil tzv. *První tabulku.*

$$\begin{array}{rl}
n = 1 & 9\,999\,999,000\,000\,0 \\
 & -0,9\,999\,999 = 9\,999\,998,000\,000\,1 \\
n = 2 & 9\,999\,998,000\,000\,1 \\
 & -0,9\,999\,998 = 9\,999\,997,000\,000\,3 \\
n = 3 & 9\,999\,997,000\,000\,3 \\
 & -0,9\,999\,997 = 9\,999\,996,000\,000\,6 \\
\ldots & \ldots \\
n = 100 & 9\,999\,900,000\,495\,0
\end{array}$$

Další tabulky (druhá, třetí) byly vytvořeny o něco komplikovanějším způsobem. Každopádně si Napier tímto postupem nejen usnadnil provádění samotných výpočtů, ale také ušetřil mnoho místa: kombinací hodnot z jeho tabulek bylo možno snadno nacházet logaritmy dalších čísel. Pokud by chtěl publikovat své tabulky v kompletní podobě např. do $n = 25\,000\,000$, vydaly by jeho tabulky na velmi mnoho objemných knih.

4 Výpočet dekadického logaritmu

Pokud logaritmické tabulky postupně vytváříme, je vše jasné. Jak bychom však přímo vypočítali např. dekadický logaritmus čísla 2?

Vyjděme ze základního pozorování: s rostoucím n se hodnoty $\sqrt[n]{c}$ blíží k jedné pro každé $c > 0$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1 \,.$$

Pozorovat to můžeme na konkrétních hodnotách, například pro $\sqrt[n]{2}$.

n	$\sqrt[n]{2}$
1	2
2	$1,414213562373095\ldots$
3	$1,259921049894873\ldots$
4	$1,189207115002721\ldots$
5	$1,148698354997035\ldots$
20	$1,035264923841377\ldots$
100	$1,00\,6955550056718\ldots$
1 000	$1,000\,69338746258\ldots$
10 000	$1,0000\,69317120376\ldots$
100 000	$1,00000\,6931495828\ldots$
1 000 000	$1,000000\,69314742\ldots$
10 000 000	$1,0000000\,6931472\ldots$
100 000 000	$1,00000000\,6931471\ldots$

Nyní můžeme přistoupit k výpočtu hodnoty $y = \log_{10} 2$. Přepišme tento vztah podle definice logaritmu:

$$2 = 10^y\,.$$

Odmocněním obou stran této rovnice dostaneme

$$\sqrt[n]{2} = (\sqrt[n]{10})^y\,. \tag{1}$$

Jelikož se n-té odmocniny blíží shora k jedné, je možno je pro dostatečně velká n psát ve tvaru

$$\sqrt[n]{2} = 1 + \varepsilon_n\,, \qquad \text{resp.} \qquad \sqrt[n]{10} = 1 + \delta_n\,,$$

kde ε_n a δ_n jsou velmi malá kladná reálná čísla. Rovnici (1) tedy můžeme přepsat ve tvaru

$$1 + \varepsilon_n = (1 + \delta_n)^y\,.$$

Podle zobecněné binomické věty[1] aplikované na pravou stranu dostáváme:

$$1 + \varepsilon_n = 1 + \binom{y}{1}\delta_n + \binom{y}{2}\delta_n^2 + \binom{y}{3}\delta_n^3 + \cdots\,,$$

[1] Zobecnění binomické věty, tedy rozvoje $(1+x)^\alpha$, kde α nemusí být přirozené číslo, bylo známo (zejména pro kladná $x < 1$ a kladná $\alpha \in \mathbb{R}$) již před objevem diferenciálního počtu. Užitečné bylo nejen při práci s logaritmy; právě tohoto rozvoje užil I. Newton při odvození funkce arcsin do řady, přičemž inverzí této řady nalezl rozvoj funkce sinus.

neboli (po odečtení jedniček a rozepsání binomických koeficientů)

$$\varepsilon_n = \frac{y}{1}\,\delta_n + \frac{y\cdot(y-1)}{1\cdot 2}\,\delta_n^2 + \frac{y\cdot(y-1)\cdot(y-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,\delta_n^3 + \cdots$$

Jelikož je δ_n velmi malé kladné číslo, je již jeho druhá mocnina řádově menší než samotné δ_n. Podobně je tomu i s ostatními mocninami, a tak je zanedbáme. Dostaneme tak přibližnou rovnost

$$\varepsilon_n \approx y\cdot\delta_n,$$

tj.

$$y \approx \frac{\varepsilon_n}{\delta_n}\,.$$

Celý výpočet tak můžeme shrnout do jednoduchého vztahu

$$\boxed{\log_{10} 2 \approx \frac{\varepsilon_n}{\delta_n} = \frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{10}-1}}\,.$$

Čím větší n zvolíme, tím přesnější hodnotu logaritmu dostaneme.[2] Pohodlně to můžeme pozorovat v následující tabulce.

n	$\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{10}-1}$
2	$\frac{0{,}4142135623...}{2{,}1622776601...} = 0,\,191\ldots$
10	$\frac{0{,}0717734625...}{0{,}2589254117...} = 0,277\,197\ldots$
100	$\frac{0{,}0069555500567...}{0{,}02329299228...} = 0,298\,611\ldots$
1 000	$\frac{0{,}00069338746258...}{0{,}002305238077...} = 0,300\,787\ldots$
10 000	$0,301\,005\ldots$
	...

Pro porovnání ještě uveďme hodnotu $\log_{10} 2 = 0,\ 301\,029\,995\,664\ldots$

5 Přirozený logaritmus

Při výpočtu dekadického logaritmu je vždy potřeba vydělit pro zvolené n číslem $\sqrt[n]{10}-1$. To je číslo, které musí být k dosažení dostatečné přesnosti uvedeno na mnoho desetinných míst; dělení jím je tedy náročné. Vzniká

[2] Přísně vzato bychom měli prošetřit konvergenci, narušili bychom tím však elementární podobu textu. Omezíme se tedy jen na pozorování chování posloupnosti pro vybraná n.

tak otázka, zda by se tohoto nepříjemného závěrečného dělení nedalo zbavit volbou vhodného základu $a > 0$, $a \neq 1$.

Chceme se tedy zbavit výrazu $\sqrt[n]{a} - 1$ volbou vhodného a. Ideální by bylo, kdyby a bylo přímo n-tou mocninou, tj. ve tvaru $a = u^n$; samotné u však nebude moci být konstantou, tou musí být základ, takže nutně bude muset záviset na n. Po odmocnění bychom pak ještě odečetli jedničku, která by v čísle u_n měla být obsažena, tj. $u_n = 1 + v_n$, neboli $a = (1 + v_n)^n$. Pro dané n bychom tak nemuseli počítat n-tou odmocninu, ani odečítat jedničku, pouze dělit v_n. Pokud bychom zvolili $v_n = \frac{1}{w_n}$, tak bychom nakonec nemuseli dělit, ale násobit w_n. Zkusme co nejjednodušší volbu $w_n = n$. Hledaný základ by tak byl:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Problém je, že se nejedná o konstantu, ale posloupnost závislou na n. Se vzrůstajícím n však tato posloupnost roste k jediné hodnotě, kterou označíme e (Eulerovo číslo, jeho hodnota je $e = 2{,}718\,281\,828\,459\dots$):

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Tj. pro dostatečně velká n je $e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, neboli $e^{1/n} = \sqrt[n]{e} \approx 1 + \frac{1}{n}$.

5.1 Výpočet přirozeného logaritmu

Ověřme nyní, že logaritmus o základu e půjde snadno vypočítat. Vypočtěme tedy pro srovnání hodnotu $\log_e 2$. Opět vyjádříme n-té odmocniny:

$$\sqrt[n]{2} = 1 + \varepsilon_n\,, \qquad \sqrt[n]{e} \approx 1 + \frac{1}{n}\,.$$

Z definice logaritmu $\log_e 2 = y$ máme $2 = e^y$. Na tuto rovnici aplikujeme n-tou odmocninu:

$$\sqrt[n]{2} = (\sqrt[n]{e})^y\,, \qquad \text{tj.} \quad 1 + \varepsilon_n \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^y .$$

Dle zobecněné binomické věty

$$1 + \varepsilon_n \approx 1 + \binom{y}{1}\frac{1}{n} + \binom{y}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{y}{3}\frac{1}{n^3} + \cdots$$

a po zanedbání členů obsahujících vyšší mocniny výrazu $\frac{1}{n}$:

$$1 + \varepsilon_n \approx 1 + y \cdot \frac{1}{n} + \cdots$$

Je tedy $\varepsilon_n \approx y \cdot \frac{1}{n}$, neboli

$$y \approx n \cdot \varepsilon_n = n \cdot (\sqrt[n]{2} - 1)\,.$$

Je zřejmé, že se nám podařilo naplnit cíl, který jsme si vytkli: zbavit se závěrečného dělení. Místo toho máme násobení přirozeným číslem n, které můžeme podstatně zjednodušit volbou $n = 10^i$ pro nějaké $i \in \mathbb{N}$ dostatečně velké. Další výhodou je, že pro výpočet hodnot $\log_e x$ není třeba znát hodnotu čísla e.

Tento základ e je tedy při výpočtu logaritmů přirozenou volbou. Logaritmy o tomto základu nazýváme *přirozené* a místo $\log_e x$ píšeme $\ln x$ (z lat. *logarithmus naturalis*).

Pozorujme ještě několik hodnot při výpočtu $\ln 2$ dle vztahu

$$\ln 2 \approx n \cdot \varepsilon_n = n \cdot (\sqrt[n]{2} - 1)\,.$$

n	$n \cdot (\sqrt[n]{2} - 1)$
10	$10 \cdot 0{,}071\,773\,462 \cdots = 0{,}717\,734\,62 \ldots$
100	$0{,}69\vert 5\,555\,005 \ldots$
1 000	$0{,}693\vert\,387\,462 \ldots$
10 000	$0{,}693\,1\vert 71\,203 \ldots$
100 000	$0{,}693\,14\vert 9\,582 \ldots$
1 000 000	$0{,}693\,147\vert\,420 \ldots$
	...

Pro srovnání ještě uveďme přesnou hodnotu $\ln 2 = 0{,}693\,147\,180 \ldots$

Ze vztahu

$$\ln 2 \approx n \cdot (\sqrt[n]{2} - 1)$$

přímo plyne ještě jedna souvislost. Pozorujeme-li výše uvedenou tabulku hodnot $\sqrt[n]{2}$, zjistíme, že pro n rovná mocninám desítky spatříme za desetinnou čárkou (a blokem nul) platné číslice hodnoty $\ln 2$, např.

$$\sqrt[1\,000\,000]{2} = 1{,}000\,000\,693\,147\,\ldots$$

a pro srovnání:

$$\ln 2 = 0{,}693\,147\,\ldots$$

Literatura

[Nap1] Napier, J. *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. Edinburgh, 1614.

[Nap2] Napier, J. *Mirifici logarithmorum canonis constructio*. Edinburgh, 1619.

[Bri] Briggs, H. *Arithmetica Logarithmica*, London, 1624.