Definice 1.1.
Množina reálných čísel je množina $\mathbf{R}$ s dvěma binárními operacemi $+, .$ a jednou binární relací $<$, při čemž platí tyto axiomy:

(I) $(\mathbf{R}, +)$ je abelovská grupa, tj.

$(R1)$ $(\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})(\forall z \in \mathbf{R})(x + y) + z = x + (y + z)$,

$(R2)$ $(\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})x + y = y + x$,

$(R3)$ $(\exists 0 \in \mathbf{R})(\forall x \in \mathbf{R})x + 0 = x$,

$(R4)$ $(\forall x \in \mathbf{R})(\exists - x \in R)x + (-x) = 0$.

(II) $(\mathbf{R} - \{0\}, .)$ je abelovská grupa, tj.

$(R5)$ $(\forall x \in \mathbf{R} - \{0\})(\forall y \in \mathbf{R} - \{0\})(\forall z \in \mathbf{R} - \{0\})(x.y).z =$
$= x.(y.z)$,

$(R6)$ $(\forall x \in \mathbf{R} - \{0\})(\forall y \in \mathbf{R} - \{0\})x.y = y.x$.

$(R7)$ $(\exists 1 \in \mathbf{R} - \{0\})(\forall x \in \mathbf{R} - \{0\})x.1 = x$,

$(R8)$ $(\forall x \in \mathbf{R} - \{0\})(\exists x^{-1} \in \mathbf{R} - \{0\})x.x^{-1} = 1$.

(III) Operace $+$ je distributivní vzhledem k operaci $.$, tj.

$(R9)$ $(\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})(\forall z \in \mathbf{R})x.(y + z) = (x.y) + (x.z)$.

(IV) $(\mathbf{R}, <)$ je lineárně uspořádaná množina, tj.

$(R10)$ $(\forall x \in \mathbf{R})x \overline{<} x$,

$(R11)$ $(\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})(\forall z \in \mathbf{R})(x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow x < z$,

$(R12)$ $(\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})(x < y) \vee (y < x) \vee (x = y)$.

(V) Operace $+, .$ jsou slučitelné s uspořádáním $<$, tj.

$(R13)$ $(\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})(\forall z \in \mathbf{R})(x < y) \Rightarrow x + z < y + z$,

$(R14)$ $(\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})(\forall z \in \mathbf{R})(x < y) \wedge (z > 0) \Rightarrow x.z < y.z$.

(VI) V $\mathbf{R}$ platí axiom spojitosti, tj.

$(R15)$ $(\emptyset \neq X \subseteq \mathbf{R}) \wedge (\emptyset \neq Y \subseteq \mathbf{R}) \wedge (X \leq Y) \Rightarrow (\exists a \in \mathbf{R})X \leq a \leq Y$.

Poznamenejme, že množina s dvěma binárními operacemi +,. splňujícími axiomy (R1) - (R9), se nazývá pole. $(\mathbf{R}, +, .)$ je tedy pole.

Pole, na němž je definována relace lineárního uspořádání splňující axiomy (R13), (R14), se nazývá uspořádané; $(\mathbf{R}, +, ., <)$ je tedy uspořádané pole. Axiom (R15) popisuje důležitou vlastnost relace $<$ na $\mathbf{R}$ nazývanou její spojitostí; $\mathbf{R}$ je tedy spojitě uspořádané pole.

V souvislosti s definicí 1.1 vyvstávají - jako při každé axiomatické definici - dvě přirozené otázky:

(1) Je předložený systém axiomů bezesporný, tj. existuje vůbec množina $\mathbf{R}$?

(2) Je množina $\mathbf{R}$ popsána axiomy (R1) - (R15) jednoznačně?

Odpověď na první otázku je pozitivní pouze relativně. Zmínili jsme se již, že množinu $\mathbf{R}$ lze konstruktivně vybudovat z teorie množin. Jestliže je tedy teorie množin bezesporná, je i teorie reálných čísel (tj. teorie vybudovaná z axiomů (R1) - (R15)) bezesporná.

Odpověď na druhou otázku je pozitivní v plném rozsahu. Lze dokázat toto tvrzení: Jsou-li $(\mathbf{R}, +, ., <)$, $(\mathbf{S}, \oplus, \odot, \prec)$ dvě množiny splňující axiomy (R1) - (R15), pak existuje bijekce $f : \mathbf{R} \to \mathbf{S}$ taková, že pro každé prvky $x, y \in \mathbf{R}$ platí $f(x+y) = f(x) \oplus f(y)$, $f(x.y) = f(x) \odot f(y)$, $x < y \Rightarrow f(x) \prec f(y)$. Taková bijekce se nazývá izomorfismem; jsou tedy libovolné dva modely množiny reálných čísel izomorfní a liší se vlastně jej označením svých prvků.

Poznámka 1.1.

Z axiomů (R1) - (R9) lze odvodit algebraické vlastnosti reálných čísel, tj. vlastnosti operací $+, .$. Jde o běžně známá pravidla, s nimiž se více méně neuvědoměle počítá již na základní škole; proto na ukázku odvodíme pouze některé z nich.

(1) $$(\forall a \in \mathbf{R})(\forall b \in \mathbf{R})(\exists! x \in \mathbf{R})x + a = b.$$

Existenci dokážeme snadno: položíme-li $x = b + (-a)$, je $x + a = b + (-a + a) = b + 0 = b$. Pro důkaz jednoznačnosti předpokládejme $x + a = b$, $y + a = b$, tedy $x+a = y+a$. Pak je $(x+a)+(-a) = (y+a)+(-a)$, tj. $x+(a+(-a)) = y+(a+(-a))$ a $x + 0 = y + 0$, tedy $x = y$.

Číslo $b + (-a)$ se, jak je známo, značí $b - a$ a nazývá se rozdílem čísel b, a.

(2) $$(\forall a \in \mathbf{R} - \{0\})(\forall b \in \mathbf{R} - \{0\})(\exists! x \in \mathbf{R})x.a = b.$$

Stejnou úvahou jako v (1) zjistíme, že jediným řešením rovnice $x.a = b$ je číslo $x = b.a^{-1}$, které značíme také $\frac{b}{a}$.

(3) $$(\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})x.y = 0 \Leftrightarrow (x = 0) \vee (y = 0).$$

Ukážeme nejdříve $x.0 = 0$ po každé $x \in \mathbf{R}$. Jest $x+x.0 = x.1+x.0 = x.(1+0) = x.1 = x$; přičteme-li na obě strany prvek $-x$, vyjde $x.0 = 0$. Analogicky odvodíme $0.y = 0$ pro každé $y \in \mathbf{R}$. Je-li nyní $x.y = 0$ a $y \neq 0$, pak $(x.y).y^{-1} = 0.y^{-1} = 0$, tj. $x.(y.y^{-1}) = x.1 = 0$ a $x = 0$.

Zejména je tedy $x.0 = 0.x = 0$ pro každé $x \in \mathbf{R}$. To ukazuje, že axiomy (R5) a (R6) lze formulovat pro $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, $z \in \mathbf{R}$. Také v tvrzení (2) této poznámky lze předpokládat $b \in \mathbf{R}$.

(4) $(\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})(-x).y = x.(-y) = -xy, (-x).(-y) = xy.$

Je totiž $x.y + (-x).y = (x + (-x)).y = 0.y = 0$ a z jednoznačnosti inverzního prvku vzhledem k operaci $+$ plyne $(-x).y = -xy$; analogicky ukážeme $x.(-y) = -xy$. Specielně je $(-1).x = -x$. Nyní platí $(-x).(-y) + (-xy) = ((-1).x).(-y) + (-1).xy = (-1).(x.(-y)+xy) = (-1).(-xy+xy) = (-1).0 = 0$ a z jednoznačnosti inverzního prvku plyne $(-x).(-y) = xy$.

Poznámka 1.2.

Z axiomů (R10) - (R14) ve spojení s axiomy (R1) - (R9) plynou pořádkové vlastnosti reálných čísel (pravidla pro počítání s nerovnostmi). Ukážeme opět pouze některé z nich.

(1)
$$(\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})x < y \Rightarrow -x > -y;$$
$$\text{specielně } x > 0 \Leftrightarrow -x < 0.$$

Je-li $x < y$, pak podle (R13) $x + (-x) + (-y) < y + (-x) + (-y)$, tj. $-y < -x$.

(2)
$$(\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})(\forall z \in \mathbf{R})(\forall u \in \mathbf{R})(x < y) \wedge (z < u) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x + z < y + u.$$

Z $x < y$ plyne $x+z < y+z$ a ze vztahu $z < u$ plyne $y+z < y+u$. Z tranzitivity relace $<$ pak plyne $x + z < y + u$.

(3) $(\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})(\forall z \in \mathbf{R})(x < y) \wedge (z < 0) \Rightarrow x.z > y.z.$

Podle (1) je totiž $-z > 0$ a podle (R14) $x.(-z) < y.(-z)$, tj. podle poznámky 1.1.(4) $-x.z < -y.z$ a podle (1) $x.z > y.z$.

(4) $1 > 0.$