hodnotami v takovém případě rozlišujeme podle souvislosti. Není to složité, ale vyžaduje to od čtenáře jistou pozornost.

Mocniny x^n s celým nezáporným exponentem n jsme zavedli induktivně; také ony jsou spojitými funkcemi na $\mathbb{R}$; na intervalu $[0,+\infty)$ jsou pro $n \geq 1$ rostoucí a tedy prosté. Mocniny se sudým n jsou sudými funkcemi, mocniny s lichým n jsou liché funkce. Odtud mj. vyplývá, že již nelze „zvětšit interval" $[0,\infty)$, na němž jsou sudé mocniny (kromě $x^0 \equiv 1$) prosté. Naproti tomu liché mocniny jsou vesměs rostoucí a prosté na celém $\mathbb{R}$.

2. Příklad 2.4.17 nám umožňuje poměrně brzo zavést odmocniny; slouží k určení jejich definičního oboru. Není proto nutné mít k jejich zavedení hlubší věty o spojitých funkcích (např. Větu 4.3.36). Příklad 2.4.17 ukazuje, že *pro každé* $a > 0$ existuje $\sqrt[n]{a}$. K mocninám s n, $n \geq 1$ definujeme inverzní funkce

$$x \mapsto \sqrt[n]{x}, \quad x \in [0,\infty) .$$

Ty nazýváme n-té odmocniny. Poznamenejme, že někdy se pro lichá n zavádějí n-té odmocniny na celém $\mathbb{R}$. Na úrovni střední školy není vůbec zřejmé, že platí $x^2 : [0,\infty) \overset{\text{na}}{\to} [0,\infty)$, tedy že jde o zobrazení *na*; proto by se to také jako zřejmý fakt nemělo prezentovat. K mocninám a odmocninám se však ještě vrátíme.

3. Pomocí mocnin jsme zavedli polynomy, což jsou opět funkce spojité na $\mathbb{R}$. Exponent nejvyšší mocniny, která se v polynomu vyskytuje s koeficientem $\neq 0$, se nazývá *stupeň polynomu*. Často tímto koeficientem celý polynom dělíme a pracujeme s polynomem, který má u nejvyšší mocniny koeficient 1. Polynom s touto vlastností (budeme říkat, že je v *normálním tvaru*) stupně 1, který nabývá hodnoty 0 v bodě x_1 je jednoznačně určen: je to polynom $P(x) = (x - x_1)$, $x \in \mathbb{R}$. Má-li polynom v normálním tvaru n reálných kořenů a je stupně n, je opět jednoznačně určen. Je to polynom

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n) .$$

Tyto věci považujeme za známé z algebry.

4. Několikrát jsem pracovali i s podíly polynomů. Ty tvoří další důležitou třídu funkcí, kterou zavedeme v následující definici.

Definice 6.1.9. Funkce $R(x) = P(x)/Q(x)$, kde P, Q jsou polynomy v proměnné x a polynom Q není identicky roven 0, se nazývají *funkce racionální*; někdy se užívá i název *racionální lomené funkce*. Nejjednoduššími z nich jsou kromě polynomů (v tom případě je jmenovatel Q nenulový polynom stupně 0) *mocniny s celým záporným exponentem*: $x^{-n} = 1/x^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Snadno nahlédneme, že tyto funkce jsou spojité na svém definičním oboru $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Všechny racionální funkce jsou spojité ve svém definičním oboru D_R, kterým je komplement množiny nulových bodů (kořenů) jmenovatele Q.

Algebraickými operacemi a eventuálně skládáním funkcí získáme z těchto funkcí funkce složitější. Všechny takové funkce jsou *algebraické* (viz následující Poznámka), my

však potřebujeme zavést i některé funkce *transcendentní* (takovou funkcí je např. log; s touto funkcí se čtenář patrně setkal na střední škole), tj. takové, k jejichž definici je nutná nějaká forma limitního přechodu. Limitní přechod může být skryt např. v použití řad, integrálu nebo diferenciálních rovnic. Čím pokročilejší aparát máme k dispozici, tím lze zavedení těchto funkcí zvládnout jednodušeji.

Poznámka 6.1.10. Z hlediska dnešních nároků na přesnost uvedené nepřesné charakteristiky neobstojí. Uveďme proto přesnější popis. Nechť je dána funkce f. Nechť existuje polynom

$$p(y,x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^k ,$$

jehož koeficienty a_k jsou opět polynomy s reálnými koeficienty (v proměnné x), přičemž tyto polynomy nejsou současně všechny rovny identicky 0. Jestliže platí $p(f(x),x) = 0$ všude v D_f, pak je f *algebraická funkce*. Pokud f není algebraická funkce, nazývá se *transcendentní.*

K zavedení elementárních transcendentních funkcí zvolíme cestu, kterou lze modifikovat eventuálně tak, aby byla pochopitelná i matematicky orientovaným středoškolákům. Prakticky všechny kroky můžeme vysvětlit i žákům na střední škole. Budeme používat jednoduchý nástroj, a to tzv. *funkcionální rovnice*. Vágně řečeno, označujeme tak rovnice (případně i soustavy rovnic), které se dosazením za hledanou funkci či funkce změní v rovnost pro jakoukoli hodnotu uvažovaných proměnných z dané množiny.

Poznámka 6.1.11. Pro průpravu se budeme věnovat těm funkcím f, pro které platí $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. To je příklad jedné konkrétní funkcionální rovnice; řešit ji znamená nalézt všechny funkce f definované na $\mathbb{R}$, pro které platí tato rovnost pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Funkce, které jsou řešeními této funkcionální rovnice, se nazývají aditivní funkce. Snadno lze nahlédnout, že všechny funkce tvaru $f(x) = ax$, $x \in \mathbb{R}$, kde $f(1) = a \in \mathbb{R}$, jsou řešeními rovnice. Trochu méně zřejmé je to, že každá *spojitá* funkce f, která je řešením této rovnice, je uvedeného tvaru. Exponenciálu a logaritmus zavedeme pomocí podobných rovnic (6.3) a (6.9) [3)].

6.2 Aditivní funkce

Definice 6.2.1. Každou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je řešením funkcionální rovnice

$$f(x+y) = f(x) + f(y) , \quad x, y \in \mathbb{R} , \tag{6.1}$$

budeme nazývat *aditivní funkce.*

3) Všem těmto rovnicím se říká Cauchyovy rovnice. Mají podobný tvar a liší se pouze různým užitím operací sčítání a násobení. Další Cauchyovu rovnici $f(xy) = f(x)f(y)$ lze vyšetřovat na různých intervalech, např. na $(0,\infty)$, my se jí nebudeme zabývat.

Zkoumejme jednoduché vlastnosti společné všem aditivním funkcím. Dosazením hodnoty $x = y = 0$ dostaneme pro každé řešení f rovnice (6.1)

$$f(0) = 2f(0) ,$$

tj. $f(0) = 0$. Dosazením $x = y$ dostaneme postupně

$$f(2x) = f(x + x) = 2f(x) ,$$
$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = (n+1)f(x) ,$$

z čehož plyne indukcí pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ rovnost

$$f(nx) = nf(x) .$$

S přihlédnutím ke vztahu

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$$

vidíme, že odvozená rovnost platí pro všechna celá n. Volíme-li $t = (m/n)x$, $x \in \mathbb{R}$, m celé a n přirozené, dostáváme

$$nf(t) = f(nt) = f(mx) = mf(x) , \quad \text{tj.} \quad f\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n}f(x) ,$$

a odtud již plyne rovnost

$$f(rx) = rf(x)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Q}$. A ještě jeden samozřejmý fakt: dosazením hodnoty $x = 1$ dostaneme vztah

$$f(r) = f(r.1) = rf(1) , \quad x \in \mathbb{Q} ,$$

z něho plyne, že hodnoty každé aditivní funkce jsou na $\mathbb{Q}$ určeny jedinou hodnotou $f(1)$.

Budeme-li se zajímat o *spojitá řešení* f uvažované rovnice, je situace velmi jednoduchá: pro posloupnost $\{r_n\}$ čísel $r_n \in \mathbb{Q}$, $r_n \to x$, platí s ohledem na spojitost v bodě x

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} r_n \cdot f(1) = x \cdot f(1) ;$$

tuto úvahu lze provést pro každé $x \in \mathbb{R}$. Odtud dostáváme tuto jednoduchou větu:

Věta 6.2.2. *Je-li f spojité řešení rovnice (6.1), pak existuje $a \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$f(x) = ax , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Poznámka 6.2.3. Podmínka spojitosti funkce f všude v $\mathbb{R}$ je pro linearitu aditivní funkce zbytečně silná. Snadno nahlédneme, že pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x)) = \lim_{h\to 0}(f(x) + f(h) - f(x)) = \lim_{h\to 0} f(h) . \tag{6.2}$$

Tedy aditivní funkce f je spojitá (v $\mathbb{R}$), právě když je spojitá alespoň v bodě 0, resp. je spojitá alespoň v jednom bodě. Tuto podmínku v následující větě ještě značně oslabíme.

Věta 6.2.4. *Nechť je aditivní funkce f omezená zdola (resp. shora) na nějakém intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Potom je f lineární.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti se omezíme na případ omezenosti zdola a budeme předpokládat, že platí

$$f(x) \geq M , \quad x \in [a,b] \subset I .$$

Potom pro $x \in [0, b-a]$ platí

$$f(x) = f(x+a) - f(a) \geq M - f(a) .$$

Označme $K := M - f(a)$, $b - a = d$, a uvažujme funkci

$$g(x) := f(x) - \frac{f(d)}{d}x ,$$

která jakožto součet dvou aditivních funkcí musí být také aditivní. Nyní stačí ukázat, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $g(x) = 0$, tj. $f(x) = (f(d)/d)x$, čímž bude důkaz dokončen. Je však $g(d) = f(d) - (f(d)/d)d = 0$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$g(x+d) = g(x) + g(d) = g(x) .$$

Protože je g zdola omezená na $[0,d]$ a periodická s periodou d, je zdola omezená na $\mathbb{R}$. Předpokládáme-li nyní existenci $x_0 \in \mathbb{R}$, $g(x_0) \neq 0$, je zřejmě $x_0 \neq 0$ a lze volit $x_1 \neq 0$ tak, že $g(x_1) < 0$. K tomu stačí položit $x_1 = x_0$ pro $g(x_0) < 0$, nebo $x_1 = -x_0$ pro $g(x_0) > 0$. Z rovnosti

$$g(nx_1) = ng(x_1) , \quad n \in \mathbb{N} ,$$

dostáváme spor, neboť užitím předchozí rovnosti lze lehce najít takové $n \in \mathbb{N}$, aby platilo $ng(x_1) < K$. Tím je důkaz dokončen. □

Poznámka 6.2.5. Povšimněme si ještě následujícího faktu: samotný předpoklad spojitosti nezaručí jednoznačnost řešení rovnice (6.1); grafy všech spojitých řešení tvoří svazek přímek procházejících jedním bodem (počátek). Pokud poněkud uměle upravíme již užitou „výběrovou podmínku“, platí pro $f(x) = ax$ zřejmě

$$a = \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - 0}{x - 0} = f'(0) ,$$

tedy jednoznačnost řešení můžeme zaručit předepsáním hodnoty derivace řešení v bodě, kterým grafy všech řešení procházejí.

Poznámka 6.2.6. Předcházející výklad nedává odpověď na otázku, zda vůbec nespojitá aditivní funkce existuje. Jde však již o složitější záležitost, vyžadující zvládnutí pojmu Hamelovy báze. Zde se omezíme na konstatování, že takové nespojité aditivní funkce existují a všimneme si jedné jejich vlastnosti, která do jisté míry ukazuje, jak jsou „divoké“.

Graf každé nespojité aditivní funkce je dokonce hustý v $\mathbb{R}^2$. To znamená, že pokud zvolíme intervaly (a,b), (c,d), $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, jakkoli, existuje takové $x \in \mathbb{R}$, pro něž

$$[x, f(x)] \in (a,b) \times (c,d) .$$

To se snadno dokáže: musí existovat takové dva body $x_1, x_2 \in (a,b)$, pro které platí nerovnosti $f(x_1) < c$, $f(x_2) > c$, neboť jinak by byla f na (a,b) shora či zdola omezená. V bodech množiny $\{x_1 + (m/n)(x_2 - x_1);\ m,n \in \mathbb{N},\ 0 \le m \le n\}$ nabývá f hodnot, které tvoří hustou podmnožinu intervalu $(f(x_1), f(x_2))$, a lze tedy snadno volit x tak, že je $[x, f(x)] \in (a,b) \times (c,d)$.

6.3 Exponenciální funkce

Budeme se zabývat řešením podobné funkcionální rovnice, jako byla rovnice (6.1). Nejprve dokážeme toto

Lemma 6.3.1. *Pro každé řešení f funkcionální rovnice*

$$f(x+y) = f(x)f(y)\ , \qquad x, y \in \mathbb{R}\ , \tag{6.3}$$

které není identicky rovno 0, platí: (a) $f(0) = 1$; (b) $f(x) > 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$; (c) $f(-x) = (f(x))^{-1}$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, (d) $f(nx) = (f(x))^n$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a všechna $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Je-li f nenulové řešení (6.3), existuje alespoň jedno $x_0 \in \mathbb{R}$, pro něž je $f(x_0) \neq 0$. Potom z rovnosti

$$f(x_0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)f(0)$$

plyne $f(0) = 1$. Tedy: *každé řešení* rovnice (6.3), pokud není identicky nulové, nabývá v bodě 0 hodnoty 1. Dále platí pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \ge 0\ ,$$

to znamená, že všechna řešení (6.3) jsou nezáporné funkce. Protože platí i

$$1 = f(0) = f(x - x) = f(x) \cdot f(-x)\ ,$$

vyhovují *nenulová* řešení rovnice (6.3) vztahu

$$f(-x) = (f(x))^{-1}$$

a jsou dokonce *všude kladná*. Konečně ze vztahů

$$f(2x) = f(x+x) = (f(x))^2\ ,$$
$$f((n+1)x) = f(nx + x) = (f(x))^n \cdot f(x) = (f(x))^{n+1}\ ,$$

dostáváme pomocí matematické indukce

$$f(nx) = (f(x))^n$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. □

Poznámka 6.3.2. Snadno si rozmyslíme, že uvedené vlastnosti patří k základním vlastnostem exponenciálních funkcí, se kterými se seznamují žáci střední školy. Tím jsme vedeni k formulaci věty, která ukazuje, že se exponenciální funkce dají poměrně velmi jednoduše charakterizovat. Později se ukáže, že následující věta popisuje speciální exponenciální funkci (jejím základem je číslo e), které budeme krátce říkat exponenciála.

Věta 6.3.3 (zavedení exponenciály; Cauchy 1821*). *Existuje právě jedna funkce f definovaná na $\mathbb{R}$, která vyhovuje funkcionální rovnici*

$$f(x+y) = f(x)f(y)\ , \qquad x, y \in \mathbb{R}\ , \tag{6.3}$$

a podmínce

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1\ . \tag{6.4}$$

Důkaz této věty rozložíme do několika kroků. Nejprve dokážeme několik lemmat. Čtenář by si měl připomenout Poznámku 1.3.23 a Lemma 1.3.27.

Lemma 6.3.4. *Každá funkce vyhovující funkcionální rovnici* (6.3) *a podmínce* (6.4) *má derivace všech řádů, je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$ a zobrazuje $\mathbb{R}$ na interval $(0,\infty)$; platí pro ni $f' = f$.*

Důkaz. Platí

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1\ .$$

Snadno spočteme derivaci funkce f v ostatních bodech $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x)(f(h) - 1)}{h} = f(x) \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h} = f(x)\ .$$

Je tedy $f' = f > 0$, resp. $f^{(n)} = f$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ [4]. Proto je f rostoucí na $\mathbb{R}$, a je $f > 1$ na $(0,\infty)$ a $f < 1$ na $(-\infty, 0)$. Zderivujme funkci $g(x) = f(x) - (x+1)$, $x \in \mathbb{R}$. Zřejmě platí

$$g'(x) = f'(x) - 1 = f(x) - 1\ ,$$

takže $g'(x) < 0$ pro $x \in (-\infty, 0)$ a $g'(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$. Jelikož je $g(0) = 0$, nabývá g v bodě 0 minima a platí $f(x) \ge x + 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Jelikož je f rostoucí spojitá funkce na $\mathbb{R}$, má tedy Darbouxovu vlastnost. Dále podle tvrzení o limitě funkcí a nerovnostech platí

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \ge \lim_{x \to \infty} (x + 1) = \infty$$

[4] Současně jsme dokázali, že každé řešení rovnice (6.3), vyhovující podmínce (6.4), vyhovuje diferenciální rovnici $y' = y$; viz Kapitola 9.

a s ohledem na bod (c) z Lemmatu 6.3.1 je $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Odtud plyne $R_f = (0,\infty)$. $\square$

Lemma 6.3.5. *Pro každou funkci f vyhovující funkcionální rovnici* (6.3) *jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(1) $\lim_{x\to 0}(f(x)-1)/x = 1$;

(2) $f(x) \geq x+1$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$;

(3) $1+x \leq f(x) \leq (1-x)^{-1}$ *pro všechna* x, $x<1$.

Důkaz. Z podmínky (1) plyne (2); to jsme ukázali již v důkazu Lemmatu 6.3.4. Podle Lemmatu 6.3.1 platí $1/f(x) = f(-x) \geq 1-x$, a tedy pro $x<1$ je

$$1+x \leq f(x) \leq \frac{1}{1-x} .$$

Tím je dokázána podmínka (3). Konečně, platí-li nerovnosti (3) pro všechna $x<1$, plyne odtud pro $0<x<1$

$$x \leq f(x)-1 \leq \frac{x}{1-x}, \quad \text{resp.} \quad 1 \leq \frac{f(x)-1}{x} \leq \frac{1}{1-x} ,$$

a pro $x<0$ také

$$1 \geq \frac{f(x)-1}{x} \geq \frac{1}{1-x} .$$

Podle Věty 4.3.12 o limitách funkcí a nerovnostech odtud snadno dostaneme $f'_+(0) = f'_-(0) = 1$ a tedy $f'(0)=1$. To však je jen jiná forma zápisu podmínky (1). Tím je důkaz ekvivalence podmínek (1) – (3) dokončen. $\square$

K dokončení důkazu Věty 6.3.3 musíme dokázat *existenci* a *jednoznačnost* funkce s požadovanými vlastnostmi. Začneme s důkazem jednoznačnosti.

Lemma 6.3.6. *Existuje nejvýše jedna funkce, která vyhovuje funkcionální rovnici* (6.3) *a podmínce* (6.4).

Důkaz. Předpokládejme, že funkce f a g vyhovují obě předpokladům Věty 6.3.3. Potom podle Lemmatu 6.3.4 platí kromě rovnosti $f'=f$ též $g'=g$, a tedy platí

$$(f/g)' = \frac{f'g-fg'}{g^2} = \frac{fg-fg}{g^2} = 0 .$$

Podle Důsledku 5.2.20 je podíl f/g konstantní funkcí na $\mathbb{R}$. Existuje tady $K>0$ tak, že pro všechna $x\in\mathbb{R}$ platí $f(x)=Kg(x)$. Dosadíme-li $x=0$, dostaneme podle bodu (a) Lemmatu 6.3.1 hodnotu K: platí $K=1$, a proto je $f=g$. $\square$

Lemma 6.3.7. *Existuje funkce f, která vyhovuje funkcionální rovnici* (6.3) *a podmínce* (6.4).

Důkaz. Definujme funkci

$$f(x) := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \qquad x\in\mathbb{R} \tag{6.5}$$

a ukažme nejprve, že f je korektně definována na $\mathbb{R}$; k tomu stačí ukázat, že pro každé $x\in\mathbb{R}$ je posloupnost, vzstupující v rovnosti (6.5) vpravo, omezená a že existuje $k\in\mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n\geq k$ je též monotónní. Zvolme $x\in\mathbb{R}$ a k němu $k\in\mathbb{N}$ tak, aby platilo $|x|<k$, tj. $|x|/k<1$; toto k tedy závisí na x. Z Bernoulliovy nerovnosti plyne pro všechna $n\in\mathbb{N}$, $n\geq k$, odhad

$$(1+1/n)^p > 1+p/n ,$$

pomocí kterého dále dostáváme

$$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| \leq \left(1+\frac{|x|}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{k}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{nk} \leq e^k .$$

Označíme-li (x je stále pevně zvoleno)

$$a_n := \left(1+\frac{x}{n}\right)^n ,$$

je tato posloupnost shora omezená. Dále je $\{a_n\}$ pro všechna $n>k$ neklesající. K důkazu lze použít AG-nerovnost z Lemmatu 1.3.27 nebo Bernoulliovu nerovnost z Poznámky 1.3.23. Podle AG-nerovnosti platí pro tato $n>k$ (vlevo v nerovnosti stojí součin $(n-1)$ stejných čísel a čísla 1)

$$\left(1+\frac{x}{n-1}\right)^{n-1}\cdot 1 \leq \left(\frac{n+x}{n}\right)^n .$$

Platí tedy $a_{n-1}\leq a_n$. Proto existuje limita $\lim a_n\in\mathbb{R}$ a definice (6.5) je korektní.

Nyní použijeme Bernoulliovu nerovnost, pomocí níž dostaneme pro $n>k$

$$f(x) \geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1+n\frac{x}{n} = 1+x .$$

Odtud podle Lemmatu 6.3.5 vyplývá, že f vyhovuje i podmínce (6.4). Zbývá dokázat, že f vyhovuje funkcionální rovnici (6.3).

Zvolme libovolně $x,y\in\mathbb{R}$ a k nim nyní vyberme $k\in\mathbb{N}$ tak, aby platilo $\max\{|x/k|,|y/k|,|x+y|/k\}<1$ pro všechna $n\in\mathbb{N}$, $n>k$. Z AG-nerovnosti pro dvě nezáporná x_1, x_2 [5] plyne pro všechna $n\in\mathbb{N}$, $n>k$, nerovnost

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{x+y}{2n}\right)^{2n} .$$

[5] Viz nerovnost v (1.10).

Užitím Věty 2.3.2 o limitách a nerovnostech dostaneme pro $n \to \infty$ podle tvrzení o součinu limit $f(x)\,f(y) \le f(x+y)$. Pro obrácenou nerovnost využijeme opět AG-nerovnost, tentokrát ve tvaru (1.9) z Kapitoly 1. Z ní plyne opět pro shora zvolená $x, y \in \mathbb{R}$ a k pro $n > k$ nerovnost

$$\left(1+\frac{x+y}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{xy}{n}\right) \le \left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n ,$$

z níž dostaneme pro f obdobně podle Věty 2.3.2 nerovnost $f(x+y) \le f(x)\,f(y)$. To znamená, že funkce f vyhovuje funkcionální rovnici (6.3). □

Důkaz Věty 6.3.3. Shrnutím výsledků z předcházejících dokázaných lemmat dostáváme existenci a jednoznačnost f. □

Definice 6.3.8. Funkci popsanou Větou 6.3.3 nazýváme *exponenciála*. Platí tedy pro všechna $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n , \qquad x \in \mathbb{R} .$$

Poznámka 6.3.9. Porovnáním se vztahem (3.7) z Příkladu 3.2.5 vidíme, že platí $\exp(1) = \mathrm{e}$. Kdybychom ve Větě 6.3.3 předepsali jinou hodnotu limity v (6.4), dostali bychom jinou (exponenciální) funkci; my se však k ostatním exponenciálním funkcím dostaneme jiným způsobem. Znalost exp nám umožňuje zavést ještě další, relativně důležité funkce.

Definice 6.3.10. Definujme pro všechna $x \in \mathbb{R}$

$$\cosh x := \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2} , \quad \sinh x := \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2} . \tag{6.6}$$

Funkce cosh se nazývá *hyperbolický kosinus* a funkce sinh se nazývá *hyperbolický sinus*. Tak je též čteme, výrazům typu „koshá“ či „sinhá“ se vyhýbáme.

Příklad 6.3.11. Vlastnosti zavedených hyperbolických funkcí v mnohém připomínají vlastnosti goniometrických funkcí cos a sin, se kterými se čtenář setkal na střední škole (my k nim dospějeme na konci této kapitoly). Jednoduše lze ověřit, že např. platí nerovnost $\cosh x \ge 1 > 0$, $x \in \mathbb{R}$, a že

$$(\cosh)' = \sinh , \qquad (\sinh)' = \cosh ;$$

tedy sinh je rostoucí funkce na $\mathbb{R}$. Dále je $\sinh 0 = 0$, tedy $\sinh x > 0$ pro $x > 0$ a $\sinh x < 0$ pro $x < 0$. Proto cosh je klesající funkcí na intervalu $(-\infty, 0)$ a rostoucí funkcí na intervalu $(0, \infty)$. V bodě 0 má funkce cosh minimální hodnotu $\cosh(0) = 1$. Konečně zderivováním snadno ověříme, že $(\cosh^2 x - \sinh^2 x - 1)' = 0$ všude v $\mathbb{R}$, derivovaná funkce je tedy konstantní a platí vzorec

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Poznámka 6.3.12. Je-li $\varphi \in \mathbb{R}$, pak bod $P[x, y]$, $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, leží na jednotkové kružnici (o rovnici $x^2 + y^2 = 1$). Podobně pro bod $P[x, y]$, $x = \cosh\varphi$, $y = \sinh\varphi$, platí

$$x^2 - y^2 = \cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi = 1 ,$$

a proto leží na „pootočené“ rovnoosé hyperbole o rovnici $x^2 - y^2 = 1$. V analogiích bychom mohli jít dále, pro vysvětlení názvů „hyperbolický sinus“ s „hyperbolický kosinus“ to však stačí.

Poznámka 6.3.13. Je přirozené se tázat, jak jsme „uhodli“, že exp je možno definovat pomocí (6.5). Odpověď, že jsme to udělali jako Euler, neobstojí; ukážeme si proto několik dalších souvislostí. Druhou přirozenou otázkou je, jak postup modifikovat tak, abychom mohli co nejvíce přiblížit exponenciálu i žákům na střední škole, neboť to byl jeden z motivů výběru našeho přístupu. Druhou otázku však zodpovíme až po zavedení logaritmu.

Připomeňme bod (3) z Lemmatu 6.3.5. Nechť f je funkce vyhovující funkcionální rovnici (6.3) a podmínce (6.4), nebo kterékoli podmínce s ní podle Lemmatu 6.3.5 ekvivalentní. Zvolme libovolně $x \in \mathbb{R}$ a pak $k \in \mathbb{N}$, aby pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n > k$ platilo $|x/n| < 1$. Pro všechna taková n platí podle Lemmatu 6.3.5 a Lemmatu 6.3.1, bodu (d)

$$1+\frac{x}{n} \le f\left(\frac{x}{n}\right) \le \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-1}, \quad \text{resp.} \quad 1+\frac{x}{n} \le \left(f(x)\right)^{1/n} \le \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-1},$$

a tedy platí

$$a_n := \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le f(x) \le \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n} =: b_n .$$

Protože podle AG-nerovnosti platí (vlevo v nerovnosti stojí opět součin $(n-1)$ stejných čísel a čísla 1)

$$\left(1-\frac{x}{n-1}\right)^{n-1}\cdot 1 \le \left(\frac{n-x}{n}\right)^n ,$$

dostáváme odtud přechodem k převráceným hodnotám $b_{n-1} \ge b_n$. Obě posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ mají tutéž limitu. K tomu podle Věty 2.3.2 stačí dokázat, že platí $a_n/b_n \to 1$. Pro všechna $n > k$ však podle Bernoulliovy nerovnosti platí

$$1 \ge \frac{a_n}{b_n} = \frac{(1+x/n)^n}{(1-x/n)^{-n}} = (1-x^2/n^2)^n \ge 1 - n(x^2/n^2) = 1 - x^2/n \to 1 .$$

Odtud z jednoznačnosti limity plyne jiným způsobem i jednoznačnost $f(x)$ i funkce f. Proto je definice exp vcelku velmi přirozená.

Příklad 6.3.14. Ukažme, že funkce e^x je transcendentní. Pokud by existoval polynom $p = p(y, x)$ s vlastnostmi, popsanými v Poznámce 6.1.10, lze předpokládat, že též platí $a_0(x) \not\equiv 0$ (jinak bychom dělili vhodnou mocninou e^x). Limitním přechodem $x \to -\infty$ v rovnosti

$$a_0(x) = a_1(x)\mathrm{e}^x + a_2(x)\mathrm{e}^{2x} + \cdots + a_n(x)\mathrm{e}^{nx}$$

bychom obdrželi $\lim_{x\to-\infty} a_0(x) = 0$, což je spor.

Příklad 6.3.15. Podle Věty 4.4.1 je $\lim_{x\to 0}\exp(-1/x^2) = 0$; použili jsme její část (2). Existuje proto spojité rozšíření f funkce $\exp(-1/x^2)$ na $\mathbb{R}$ Vyšetřeme ještě derivaci funkce f: je

$$f'(x) = (2/x^3)f(x), \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} .$$

K funkci f se ještě vrátíme v Příkladu 7.4.30.

6.4 Inverzní funkce

Nyní dokážeme několik jednoduchých obecných tvrzení o inverzních funkcích. Tato tvrzení pak v této kapitole vícekrát použijeme.

Lemma 6.4.1. *Nechť funkce f je rostoucí (resp. klesající) na intervalu I a nechť $f : I \overset{\text{na}}{\to} J$, kde J je také interval. Potom je funkce $g := f^{-1}$ rostoucí (resp. klesající) na J.*

Důkaz. Jsou-li $s, t \in J$, $s < t$, je $x := g(s) < g(t) =: y$. Kdyby totiž platilo $g(s) = x \geq y = g(t)$, pak bychom dostali $f(x) = s \geq t = f(y)$, což vede ke sporu. Podobně se dokáže tvrzení o klesající funkci. □

Lemma 6.4.2. *Nechť funkce f splňuje předpoklady Lemmatu 6.4.1 a nechť je spojitá na intervalu I. Potom je funkce $g := f^{-1}$ spojitá intervalu J.*

Důkaz. Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že f je rostoucí (druhý případ se dokáže opět obdobně). Volme $x \in I$ a předpokládejme, že x není koncovým bodem I, takže $f(x)$ není koncovým bodem J. Zvolme dále $\varepsilon > 0$ tak, aby platilo $x + \varepsilon \in I$. Pro $y \in I$, $x < y < x + \varepsilon$, je $f(y) \in J$, $f(x) < f(y) < f(x + \varepsilon)$ a lze položit $f(x + \varepsilon) - f(x) = \delta$. Zřejmě platí

$$g([f(x), f(x) + \delta)) \subset [x, x + \varepsilon) ,$$

a tedy g je spojitá zprava v $f(x)$. Obdobně vyšetříme spojitost zleva v bodě, který není počáteční. □

Poznámka 6.4.3. V Lemmatu 6.4.2 jsme dokázali elementárně fakt, který již známe z Lemmatu 4.3.40. Tam jsme však použili k důkazu obecnějších a hlubších poznatků.

Lemma 6.4.4. *Nechť funkce f splňuje opět předpoklady Lemmatu 6.4.1 a nechť f má ve vnitřním bodě $x \in I$ vlastní nenulovou derivaci. Potom $g := f^{-1}$ má vlastní nenulovou derivaci v bodě $s := f(x)$ a platí*

$$g'(s) = \frac{1}{f'(x)} . \tag{6.7}$$

Důkaz. Dle Carathéodoryovy definice derivace existuje funkce φ spojitá v bodě x tak, že pro y z nějakého okolí $\mathcal{U}(x)$ bodu x platí

$$f(y) - f(x) = \varphi(y)(y - x), \qquad \text{a} \qquad \varphi(x) = f'(x) .$$

Nyní opět označíme, tak jako v důkazu Lemmatu 6.4.1, $f(x) = s$, resp. $g(s) = x$ a $f(y) = t$, resp. $g(t) = y$, a první rovnost přepíšeme do tvaru

$$t - s = \varphi(g(t))(g(t) - g(s)) ,$$

což dává po úpravě

$$g(t) - g(s) = \frac{1}{\varphi(g(t))}(t - s) .$$

Funkce $(\varphi(g(t)))^{-1}$ je podle Věty 4.2.18 o spojitosti složené funkce rovněž spojitá v bodě s. Dosazení dává zbytek tvrzení. □

Poznámka 6.4.5. Na tomto místě by si měl čtenář uvědomit, že jakmile dokážeme *existenci* derivace $g'(s)$, plyne vzorec (6.7) ze vzorce pro derivování složené funkce

$$1 = (x)' = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(s) \cdot f'(x) .$$

Existence je tedy tou podstatnou částí důkazu, zbytek je triviální.

Poznámka 6.4.6. Je-li f *rostoucí* a $f'(x) = 0$, je $g'(f(x)) = +\infty$; je-li f klesající a $f'(x) = 0$, je $g'(f(x)) = -\infty$. Podobné tvrzení lze obdržet i pro jednostranné derivace (důkaz přenecháme čtenáři jako cvičení; je založen na definici derivace a definici inverzní funkce).

6.5 Přirozený logaritmus

Podobným způsobem jako jsme zavedli exponenciálu lze zavést přirozený logaritmus. Náš postup bude trochu odlišný: přirozený logaritmus zavedeme jako inverzní funkci k funkci exp. Přesto budeme také pracovat s funkcionální rovnicí pro logaritmus, abychom si ukázali, jak z ní plynou základní vlastnosti logaritmů.

Definice 6.5.1 (zavedení logaritmu; Euler 1748*). Inverzní funkci k exponenciále nazýváme *přirozený logaritmus* a označujeme ji log.

Z dokázaných Lemmat 6.4.1, 6.4.2 a 6.4.4 dostáváme toto tvrzení:

Věta 6.5.2. *Funkce* log *zobrazuje interval* $(0, \infty)$ *na* $\mathbb{R}$*, je na intervalu* $(0, \infty)$ *rostoucí, spojitá a pro její derivaci platí* $\log'(x) = 1/x$, $x \in (0, \infty)$ [6] .

[6] Často se setkáte i se zápisem $(\log x)' = 1/x$.

Důkaz. Spočteme pouze derivaci log, ostatní je zřejmé. Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$1 = (x)' = (\log \circ \exp)'(x) = \log'(\exp x) \exp x \ ,$$

a tedy, po záměně $\exp x = y$, $\log'(y) = 1/y$, $y \in (0, \infty)$. □

Poznámka 6.5.3. Z pedagogického hlediska je vhodné již velmi brzo na střední škole upozornit žáky při zavádění mocnin na jednu důležitou okolnost. Lze k tomu použít historie. Již ve spisu *Arithmetica integra* z r. 1544 si MICHAEL STIFEL (1486 - 1567) povšiml, že při práci s aritmetickou a geometrickou posloupností

0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	2	4	8	16	32	64	128	256	...

násobení členů ve druhé řádce (např. $8 \times 32 = 256$) odpovídá sčítání exponentů v první řádce ($3 + 5 = 8$). Pro praktické využití je uvedená množina čísel, které bychom mohli takto lehce mezi sebou násobit, poněkud „malá", ale toto povšimnutí sehrálo důležitou historickou roli při objevu logaritmů. Pokud se žáci seznámí brzo s touto vlastností mocnin, snáze budou zavádění logaritmu pomocí funkcionální rovnice chápat.

Lemma 6.5.4. *Inverzní funkce k* exp, $g = \exp^{-1}$, $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, *je řešením funkcionální rovnice*

$$g(xy) = g(x) + g(y), \qquad x, y \in (0, \infty) \ .$$

Důkaz. Označme exponenciálu kratčeji f. Pro inverzní funkci $g = f^{-1}$ platí

$$(g \circ f)(x) = x \ , \ x \in \mathbb{R} \ , \qquad (f \circ g)(u) = u \ , \ u \in (0, \infty) \ ;$$

pro $u := f(s)$, $v := f(t)$, resp. ekvivalentně $g(u) = s$, $g(v) = t$, dostáváme rovnost $uv = f(s)f(t) = f(s + t)$ a platí tedy

$$g(uv) = (g \circ f)(s + t) = s + t = g(u) + g(v) \ .$$

Tím jsme dospěli k žádané rovnici. □

Jak dále uvidíme, z této funkcionální rovnice plynou poměrně velmi jednoduše základní vlastnosti logaritmů.

Lemma 6.5.5. *Pro každé řešení g funkcionální rovnice*

$$g(xy) = g(x) + g(y) \ , \qquad x, y \in (0, \infty) \ , \tag{6.8}$$

platí: (a) $g(1) = 0$, (b) $g(x^{-1}) = -g(x)$ pro všechna $x \in (0, \infty)$, (c) $g(x/y) = g(x) - g(y)$ pro všechna $x, y \in (0, \infty)$, (d) $g(x^n) = ng(x)$ pro všechna $x \in (0, \infty)$ a všechna $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Z (6.9) vyplývá dosazením 1 za y rovnost $g(x) = g(x) + g(1)$, takže zřejmě platí $g(1) = 0$. Dále pro $x \in (0, \infty)$ lehce dostaneme

$$0 = g(1) = g\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) \ ,$$

proto pro všechna $x \in (0, \infty)$ je

$$g(x) = -g(x^{-1}) \ .$$

Zároveň dostáváme pro $x, y \in (0, \infty)$ rovnost $g(x/y) = g(x) - g(y)$. Konečně ze vztahů

$$g(x^2) = 2g(x) \ ,$$
$$g(x^{n+1}) = g(x^n \cdot x) = g(x^n) + g(x) = (n + 1)g(x)$$

dostáváme indukcí

$$g(x^n) = n\, g(x)$$

pro všechna $x \in (0, +\infty)$ a $n \in \mathbb{N}$. □

Poznámka 6.5.6. Není obtížné dokázat, že je-li g inverzní funkce k exponenciále, platí pro ni

$$\lim_{y \to 1} \frac{g(y)}{y - 1} = 1 \ .$$

Označíme-li exponenciálu f, pak $f(0) = 1$, a tedy $g(1) = 0$. Dále po dosazení $x = g(y)$ platí pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $y \in (0, \infty) \setminus \{1\}$

$$\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{f(g(y)) - f(g(1))}{g(y)} = \frac{y - 1}{g(y)} \ .$$

Odtud vyplývá

$$1 = \lim_{x \to 0} \frac{x}{f(x) - 1} = \lim_{y \to 1} \frac{g(y)}{y - 1} = \lim_{y \to 1} \frac{g(y)}{f(g(y)) - f(g(1))}$$

podle Věty 4.4.1 o limitě složené funkce, neboť g je spojitá a $(f(x) - 1)/x$ lze spojitě rozšířit do bodu 0.

Nyní již víme, že inverzní funkce k exponenciále vyhovuje funkcionální rovnici

$$g(xy) = g(x) + g(y) \ , \qquad x, y \in (0, \infty) \ , \tag{6.9}$$

a podmínce

$$\lim_{x \to 1} \frac{g(x)}{x - 1} = 1 \ . \tag{6.10}$$

Podmínka (6.10) je přitom ekvivalentní s podmínkou $g(x) \leq x - 1$ pro všechna $x \in (0, \infty)$. Dá se dokázat analogické tvrzení jako to, kterým jsme zavedli exponenciálu:

Věta 6.5.7. *Existuje právě jedna funkce $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, která vyhovuje funkcionální rovnici (6.9) a podmínce (6.10).*

Bylo by zbytečné se snažit dokazovat krok za krokem analogická tvrzení jako v případě exponenciály, spokojíme se s konstatováním, že to jde. Je možné si představit, že by z nějakých důvodů bylo vhodné začít výklad od logaritmů a na nich si „odpracovat vše". Pak se exponenciála zavede jako inverzní funkce k přirozenému logaritmu. Také tento postup lze nalézt v literatuře, viz např. [1].

Je užitečné zdůraznit, že log je taková funkce, která po zderivování dává funkci $1/x$, $x \in (0,\infty)$; jak uvidíme, toto indikuje další postup, jak lze pomocí funkce $1/x$ definovat přirozený logaritmus. K němu však nemáme ještě vybudováno potřebné teoretické zázemí a nebudeme se mu věnovat ani později.

Jak si čtenář již jistě povšiml, symbol log značí v tomto textu vždy *přirozený logaritmus*, který se často značí též lg nebo ln. V našem výkladu vystupuje prakticky stále jen přirozený logaritmus, není tedy potřeba „mezi logaritmy" rozlišovat. Je však třeba vztah k ostatním logaritmickým funkcím vymezit.

Exponenciála a přirozený logaritmus jsou i dnes, kdy se upouští od užívání logaritmických tabulek, nesporně velmi důležité, a to i na středoškolské úrovni. Jsou však také klíčem k definici dalších funkcí. Připomeňme nejprve význačné hodnoty pro funkce exp a log. Je $\exp 0 = 1$ a $\exp 1 = \mathrm{e}$. Proto $\log 1 = 0$ a $\log \mathrm{e} = 1$.

Definice 6.5.8. Pro každé $a \in (0,\infty)$ a každé $b \in \mathbb{R}$ definujeme

$$a^b := \exp(b \log a) \ . \tag{6.11}$$

Dále definujeme pomocí (6.11) pro každé $a \in (0,\infty)$ *obecnou exponenciální funkci* vztahem

$$a^x : x \mapsto \exp(x \log a), \quad x \in \mathbb{R} \ . \tag{6.12}$$

Číslo a nazýváme zpravidla *základ* exponenciální funkce. Podobně definujeme opět pomocí (6.11) pro každé $a \in \mathbb{R}$ *obecnou mocninu* vztahem

$$x^a : x \mapsto \exp(a \log x), \quad x \in (0,\infty) \ . \tag{6.13}$$

Poznámka 6.5.9. Snadno dokážete, že funkce a^x vyhovuje funkcionální rovnici (6.3), obecně však nikoli již podmínce (6.4). Přesto lze však použít Lemma 6.3.1 a tak dostat základní vlastnosti obecné exponenciály. Pro Eulerovu konstantu e pak platí

$$\mathrm{e}^x = \exp x, \quad x \in \mathbb{R} \ ,$$

což ukazuje vztah k tradičnímu značení exponenciály. V našem případě jde o důsledek definice obecné exponenciální funkce.

Poznámka 6.5.10. V Definici 6.5.8 se definuje výraz a^b pro každé $a \in (0,\infty)$ a každé $b \in \mathbb{R}$. My jsme však již definovali např. a^n pro $n \in \mathbb{N}$ apod. Jsme proto povinni ukázat, že tato nová definice již užitou definici rozšiřuje, avšak nekoliduje s ní. Označme na okamžik nově definovanou mocninu $a\,\hat{}\,n$. Pak pro $a \in (0,\infty)$ platí

$$a\,\hat{}\,n = \exp(n \log a) = (\exp(\log a))^n = a^n \ .$$

Zápis působí poněkud nezvykle, začali jsme však od „nové definice" a skončili u té, kterou jsme dosud užívali. Jde tedy opravdu (na intervalu $(0,\infty)$!) o rozšíření a tak lze užívat označení, na něž jsme zvyklí.

Příklad 6.5.11. V průběhu výkladu jsme odvodili vzorce pro derivování. Platí

$$(\mathrm{e}^x)' = \exp'(x) = \mathrm{e}^x \ , \quad x \in \mathbb{R} \ , \quad \text{a také} \quad \log'(x) = 1/x \ , \quad x \in (0,\infty) \ .$$

Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ dále platí

$$(a^x)' = \left(\mathrm{e}^{x \log a}\right)' = \mathrm{e}^{x \log a} \log a = a^x \log a \ .$$

Odtud vyplývá, že pro všechna $a \neq 1$ je exponenciála o základu a spojitá funkce, která zobrazuje $\mathbb{R}$ na interval $(0,\infty)$. Pro $a > 1$ je tato funkce rostoucí a pro $0 < a < 1$ je klesající, avšak ve všech těchto případech je prostá. Proto vždy pro $a > 0$, $a \neq 1$ existuje inverzní funkce k a^x.

Definice 6.5.12. Je-li exponenciální funkce a^x o základu a prostá (tedy $a \neq 1$), nazýváme funkci k ní inverzní *obecným logaritmem*, resp. *logaritmem o základu* a; značíme ji $\log_a$.

Příklad 6.5.13. Je zřejmé, že pro funkce $\log_a$ platí

$$\log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R} \ .$$

Pro $a > 1$ jsou tyto funkce rostoucí, pro $0 < a < 1$ jsou klesající. Snadno lze pomocí Lemmatu 6.4.4 pro každé $x \in (0,\infty)$ dokázat vzoreček

$$\log_a'(x) = \frac{1}{x \log a} \ .$$

Příklad 6.5.14. Odvodíme ještě převodní vztahy mezi logaritmickými funkcemi. Je-li $a, b \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, označme $\varphi := \log_a x$, $x \in (0,\infty)$; potom platí

$$\log_b x = \log_b(a^\varphi) = \varphi \log_b a = \log_a x \log_b a \ ,$$

a tedy platí

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \ , \quad x \in (0,\infty) \ .$$

Příklad 6.5.15. Snadno se dá opět dokázat, že funkce $\log_a$ vyhovuje funkcionální rovnici (6.9), obecně však nikoli již podmínce (6.10). Lemma 6.5.5 popisuje základní vlastnosti obecného logaritmu. Pro Eulerovu konstantu e a pro logaritmy platí vztahy

$$\log_{\mathrm{e}} x = \log x \ , \quad \log_a x = \frac{\log x}{\log a} \ , \quad x \in (0,\infty)$$

Příklad 6.5.16. Ověřte derivováním platnost vzorců (jde o dva vzorce)

$$\left(\log|x+\sqrt{x^2\pm 1}|\right)' = \left(\sqrt{x^2\pm 1}\right)^{-1} !$$

Poznamenejme, že ve vzorci se znaménkem '+' je absolutní hodnota zbytečná a že vzorec se znaménkem '−' platí pro případ, kdy je $|x|>1$.

Jelikož již víme, co je log, ukážeme si souvislost této funkce s harmonickou řadou. Vágně lze problém vyjádřit otázkou, jak rychle diverguje harmonická řada.

Příklad 6.5.17 (Euler 1740). Jednoduchou aplikací Lagrangeovy věty dostaneme

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log(n) < \frac{1}{n} . \tag{6.14}$$

Jestliže nyní označíme

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \log n , \qquad b_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \log n ,$$

dostaneme pomocí (6.14)

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n} > 0 , \quad b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \log\frac{n+1}{n} < 0 .$$

Protože dále platí $b_n - a_n = 1/n$, můžeme uplatnit princip vložených intervalů a definovat

$$\gamma := \lim\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \log n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$$

Číslo γ se nazývá *Eulerova* nebo *Euler-Mascheroniova* konstanta. Později, v souvislosti s integrálním kritériem, které nám umožní tuto situaci krásně zviditelnit, snadno nahlédneme, že platí $\gamma \in [1/2, 1]$. Platí $\gamma = 0,5772156649\ldots$.

Příklad 6.5.18. Definujme

$$\mathrm{tgh}\, x := \frac{\sinh x}{\cosh x} , \quad \mathrm{cotgh} := \frac{\cosh x}{\sinh x} .$$

Tyto funkce se nazývají *hyperbolický tangens* a *hyperbolický kotangens*. Odvoďte si samostatně jejich základní vlastnosti.

6.6 Goniometrické funkce

Dále zavedeme goniometrické funkce. Dokážeme však podstatně méně; budeme se zabývat pouze jejich vlastnostmi, ale nedokážeme zatím jejich existenci a jednoznačnost. V této části budeme používat i vyšších derivací funkce. Definujeme je rekurentním předpisem.

Definice 6.6.1. Vyšší derivace definujeme (jako funkce) rekurentně. Protože větší počet čárek není vždy přehledný, užíváme alternativní zápis: píšeme f', f'', ale často $f^{(3)}$ místo f''' atp. Definujeme (jde opět o typ induktivní definice)

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})' , \qquad n \in \mathbb{N} .$$

Klademe tedy $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = (f')' = f''$ atd. Je-li $I \subset \mathbb{R}$ interval, pak $f \in \mathcal{C}^{(k)}(I)$ znamená, že k-tá derivace je definována na I (v krajních bodech eventuálně jednostranné derivace) a je to *spojitá funkce* na I. Místo $f \in \mathcal{C}^{(0)}(I)$ píšeme pouze $f \in \mathcal{C}(I)$. Z předchozího víme, že $\mathcal{C}(I)$ je lineární prostor; snadno nahlédneme, že i $\mathcal{C}^{(k)}(I)$ je lineární prostor. Je-li konečně $f \in \mathcal{C}^{(k)}(I)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, píšeme $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}(I)$. Také $\mathcal{C}^{(\infty)}(I)$ je zřejmě lineární prostor.

Příklad 6.6.2. Jelikož pro derivování exponenciály platí

$$\exp = \exp' = \exp'' = \exp''' = \ldots ,$$

znamená to, že $\exp \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Také polynomy jsou funkce z $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Snadno též nalezneme příklady funkcí z $\mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^{(k+1)}(\mathbb{R})$.

Obraťme nyní naši pozornost ke goniometrickým funkcím. Výběr vhodných funkcionálních rovnic není jediný možný. Tak například bychom mohli použít tzv. d'Alembertovy rovnice

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) , \qquad x, y \in \mathbb{R} , \tag{6.15}$$

a snažit se pomocí ní zavést funkci cos. Zřejmým řešením (6.15) je funkce $f \equiv 0$. Pokud hledáme netriviální řešení, pak ze standardního triku (dosazení $y = 0$) dostáváme $2f(x) = 2f(x)f(0)$, tedy pro každé netriviální řešení platí $f(0) = 1$. Dosadíme-li do funkcionální rovnice (6.15) $x = 0$, vidíme, že pro každé řešení (6.15) platí

$$f(y) = f(-y) , \qquad y \in \mathbb{R} .$$

Odtud plyne, že každé řešení této rovnice je *sudá* funkce. Jestliže dále vyloučíme řešení $f \equiv 1$, pak jediná spojitá řešení rovnice (6.15) na $\mathbb{R}$ jsou tvaru ($a \in \mathbb{R}$)

$$f(x) = \cos ax , \qquad f(x) = \cosh ax ,$$

což dokázal již Cauchy v r. 1821. Jestliže budeme předpokládat, že řešení jsou hladká (např. existuje druhá (vlastní) derivace $f''(x)$ všude v $\mathbb{R}$), dostaneme dvojím zderivováním rovnice (6.15) podle proměnné y rovnici

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y) , \qquad x, y \in \mathbb{R} ,$$

která po dosazení $y = 0$ a zkrácení nabude tvaru

$$f''(x) = f''(0) \cdot f(x) ,$$

resp. $y'' - ky = 0$, kde $k = f''(0)$. Tento výsledek si pouze zapamatujeme pro pozdější dobu. Při zavádění goniometrických funkcí si uvědomíme, že již na střední škole jsme poznali řadu vzorců, ve kterých tyto funkce vystupovaly. Přitom se všechny tyto vzorce dají snadno odvodit z malého počtu základních formulí. S ohledem na další cíle budeme postupovat tak, že za determinující funkcionální rovnice zvolíme dvojici rovnic

$$c(x-y) = c(x)c(y) + s(x)s(y)\,, \qquad x,y \in \mathbb{R}\,,$$
$$s(x-y) = s(x)c(y) - c(x)s(y)\,, \qquad x,y \in \mathbb{R}\,,$$

s omezující podmínkou pro funkci s, která je analogická podmínkám, s nimiž jsme již pracovali:

$$\lim_{x\to 0} \frac{s(x)}{x} = 1\,. \tag{6.16}$$

Ukažme si, jak odtud vyplynou základní vlastnosti funkcí sin a cos. Ty tvoří jedinou dvojici spojitých funkcí, které jsou řešením uvedených rovnic a vyhovují předcházející podmínce.

Odvození všech základních vlastností obou funkcí je delší a sestává se z řady vzájemně provázaných kroků. Postupně odvodíme řadu elementárních poznatků o funkcích sin a cos (zatím je značíme s a c); tyto poznatky budeme při výpočtech používat, teprve později však ukážeme, jak se dokáže existence a jednoznačnost goniometrických funkcí. Následující větu tedy zatím nedokazujeme.

Věta 6.6.3 (zavedení goniometrických funkcí). *Existuje právě jedna dvojice funkcí na $\mathbb{R}$, které vyhovují rovnicím*

$$c(x-y) = c(x)c(y) + s(x)s(y)\,, \qquad x,y \in \mathbb{R}\,, \tag{6.17}$$
$$s(x-y) = s(x)c(y) - c(x)s(y)\,, \qquad x,y \in \mathbb{R}\,, \tag{6.18}$$

a podmínce

$$\lim_{x\to 0} \frac{s(x)}{x} = 1\,. \tag{6.19}$$

Tyto funkce nazýváme sinus a kosinus (označení: sin *a* cos*).*

Poznámky 6.6.4 (Vlastnosti funkcí sin a cos). Funkce s a c mají následující vlastnosti (budeme je odvozovat a popisovat zároveň):

1. Ze symetrie pravé strany rovnice (6.17) v proměnných x a y plyne rovnost $c(x-y) == c(y-x)$, což po dosazení $x = 0$ dává $c(-y) = c(y)$, $y \in \mathbb{R}$, a proto c je *sudá* funkce.

2. Funkce s *není konstantní*, neboť pak by nebyla splněna podmínka (6.19) (limita by byla rovna 0, nebo by neexistovala); proto existuje $x_0 \in \mathbb{R}$ tak, že $s(x_0) \neq 0$.

3. Nechť funkce c je konstantní ($\equiv K$); pak dostáváme $K = K^2 + s(x)s(y)$, $x,y \in \mathbb{R}$ a po dosazení $x = x_0$

$$s(y) = \left(s(x_0)\right)^{-1}\left(K - K^2\right)\,, \qquad y \in \mathbb{R}\,.$$

Funkce s je ale nekonstantní a nalezený spor ukazuje, že také funkce c *není konstantní.*

4. Z (6.17) dostáváme dosazením $-y$ za y s použitím předpokladu, že funkce s je sudá, pro $c(x-(-y)) = c(x+y)$ rovnost

$$c(x+y) = c(x)c(-y) + s(x)s(-y) = c(x)c(y) + s(x)s(y) = c(x-y)\,,$$

ze které vyplývá dosazením $y = x$ rovnost $c(2x) = c(0)$ platná pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Byla by tedy c konstantní funkce. Nalezený spor ukazuje, že funkce s *není* sudá; existuje proto $x_1 \in \mathbb{R}$ takové, že platí $s(x_1) \neq s(-x_1)$ a lze předpokládat, že $s(x_1) \neq 0$.

5. Protože platí

$$c(x-y) = c(x)c(y) + s(x)s(y)\,, \quad c(y-x) = c(y)c(x) + s(-y)s(-x)\,,$$

dostáváme odtud s využitím faktu, že c je sudá funkce, rovnost

$$0 = s(x)s(y) - s(-y)s(-x)\,, \tag{6.20}$$

která platí pro všechna $x,y \in \mathbb{R}$. Z ní plyne po dosazení x za y rovnost

$$s(x)s(x) - s(-x)s(-x) = 0\,, \quad \text{resp.} \quad (s(-x) - s(x))(s(-x) + s(x)) = 0\,.$$

Protože podle bodu 4. platí $s(-x_1) - s(x_1) \neq 0$, plyne odtud

$$s(-x_1) + s(x_1) = 0\,, \quad \text{resp.} \quad s(-x_1) = -s(x_1) \neq 0\,.$$

Dosazením x_1 za y do (6.20) dostaneme rovnost $s(-x) = -s(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, z čehož vyplývá, že s je *lichá* funkce; speciálně je $s(0) = -s(0) = 0$.

6. Dále platí

$$s(x) = s(x-0) = s(x)c(0) - c(x)s(0) = s(x)c(0),$$

a proto s ohledem na $s(x_1) \neq 0$ dostáváme $c(0) = 1$.

7. Rovněž platí $1 = c(0) = c(x-x) = c(x)c(x) + s(x)s(x)$, tedy

$$s^2(x) + c^2(x) = 1\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

8. Z bodu 7. plyne speciálně $|s(x)| \leq 1$, $|c(x)| \leq 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$; funkce s a c jsou proto *omezené*.

9. S přihlédnutím k bodům 1. a 5. dostáváme

$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)\,, \quad \text{resp.} \quad s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y)\,,$$

odkud speciálně dostáváme $c(2x) = c^2(x) - s^2(x)$, $s(2x) = 2s(x)c(x)$.

10. Ukážeme, že funkce s a c mají všude v $\mathbb{R}$ vlastní derivaci: pro libovolně zvolené $x \in \mathbb{R}$ platí (v průběhu výpočtu použijeme rovnost $c(h) = c^2(h/2) - s^2(h/2)$, a také rovnost z bodu 7.)

$$s'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{s(x)c(h) + c(x)s(h) - s(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{s(x)(c(h)-1) + c(x)s(h)}{h} = s(x) \lim_{h\to 0} \frac{(c(h)-1)}{h} + c(x) \lim_{h\to 0} \frac{s(h)}{h} =$$

$$= -s(x) \lim_{h\to 0} \left(\frac{s(h/2)}{h/2}\right)^2 (h/2) + c(x)\cdot 1 = -s(x)\cdot 1 \cdot 0 + c(x) = c(x)\,,$$

a proto je $s'(x) = c(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Podobně se dokáže rovnost $c'(x) = -s(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

11. Funkce c a s mají vlastní derivace všech řádů, takže $s, c \in \mathcal{C}^{(\infty)}$.

12. S ohledem na $c(0) = s'(0) = 1$ a spojitost vidíme, že funkce s je kladná na nějakém intervalu $(0,p)$ [7], a protože platí $c'(x) = -s(x)$, je c klesající na $(0,p)$. Vypočtěme hodnoty derivací funkce c: $c(0) = 1$, $c'(0) = -s(0) = 0$, $c''(0) = -c(0) = -1$, $c'''(0) = s(0) = 0$ a $c''''(0) = c(0) = 1$. Pro funkci c platí pro všechna $x \geq 0$

$$1 - \frac{x^2}{2!} \leq c(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\,.$$

Tyto nerovnosti lze dokázat elementárními prostředky sloužícími k vyšetřování průběhu funkcí. Nyní si stačí povšimnout, že polynom vpravo nabývá v bodě 2 záporné hodnoty, a tedy platí i $c(2) < 0$. K důkazu existence nejmenšího kladného nulového bodu funkce c využijeme větu o spojitém obrazu intervalu. I na střední škole by šlo tento krok obejít, ale nepovažuji to za účelné; viz [10].

Nejmenší kladné číslo, v němž funkce c nabývá hodnoty 0, označíme α; z uvedených nerovností je můžeme snadno i odhadnout; snadno zjistíme, že platí nerovnosti $\sqrt{2} < \alpha < (2(3-\sqrt{3}))^{1/2}$. Je $s(\alpha) = 1$, přičemž s roste na $(0,\alpha)$.

13. Dále platí

$$c(x-\alpha) = c(x)c(\alpha) + s(x)s(\alpha) = s(x)\,,$$

a tak postupně dostaneme

$$\begin{aligned} c(x+\alpha) &= -s(x)\,, & s(x+\alpha) &= c(x)\,, \\ c(x+2\alpha) &= -s(x+\alpha) = -c(x)\,, & c(x+4\alpha) &= -c(x+2\alpha) = c(x)\,, \\ s(x+2\alpha) &= c(x+\alpha) = -s(x)\,, & s(x+4\alpha) &= -s(x+2\alpha) = s(x)\,. \end{aligned}$$

[7] Maximální interval této vlastnosti souvisí s dále uvedenou definicí π.

Vidíme, že funkce c a s jsou periodické s nejmenší kladnou periodou 4α; položíme $\pi := 2\alpha$. Toto je pro nás *definice* π. Platí $c(\alpha) = 0 = c(3\alpha)$, a proto se c anuluje právě ve všech bodech množiny $\{(2k+1)\alpha;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Podobně dostaneme popis množiny všech nulových bodů funkce s; je to množina $\{2k\alpha;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Poznámka 6.6.5. I když jsme dokázali mnoho vlastností goniometrických funkcí sin a cos, dosud nám chybí důkaz jejich existence a jednoznačnosti. Ten provedeme později mnohem snáze jinými prostředky. V každém případě teprve potom můžeme nazvat řešení rovnic (6.17) a (6.18) splňující podmínku (6.19) sinus a kosinus. Existenci a jednoznačnost funkcí sin a cos lze dokázat pomocí jejich rozvojů v mocninnou řadu, pomocí elementární teorie diferenciálních rovnic apod.

Definice 6.6.6. Pomocí funkcí sin a cos definujeme další funkce

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}\,, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}\,.$$

Funkce tg je definována na množině $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi/2;\ k \in \mathbb{N}\}$, funkce cotg je definována na množině $\mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{N}\}$. V obou případech se odečítají množiny všech nulových bodů funkcí, vystupujících ve jmenovateli. Označení funkce tg čteme „tangens" a funkce cotg „kotangens".

Poznámka 6.6.7. Někdy se zavádějí funkce sec ($= 1/\cos$), jejíž označení čteme „sekans" a cosec ($= 1/\sin$), což čteme „kosekans"). Pro nás nemají větší význam a nebudeme se jimi podrobněji zabývat. Ukážeme si však, jak se dají odvodit další součtové vzorce. Pracujme např. s funkcí tg. Platí

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos(x\pm y)} = \frac{\sin x \cos y \pm \cos x \sin y}{\cos x \cos y \mp \sin x \sin y} = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}\,, \tag{6.21}$$

pokud ovšem jsou definovány všechny v rovnici vystupující výrazy.

Příklad 6.6.8. Limity, které se vyskytovaly ve větách o zavedení funkcí exp a sin, se vyskytují často v příkladech. Tak např.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(\sin x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(\sin x) - 1}{\sin x} \frac{\sin x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{\exp(\sin x) - 1}{\sin x} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Kromě tvrzení o limitě součinu jsme použili i Větu 4.4.1.

Poznámky 6.6.9. 1. Budeme často používat Bolzanovu větu o „spojitém obrazu intervalu" (Věta 4.3.36), na které spočívá určení definičního oboru vyšetřovaných inverzních funkcí.

2. Funkce sin, cos a tg *nejsou* prosté. Existují však intervaly, na nichž prosté jsou a tyto intervaly jsou „maximální". Na nich budeme hledat k těmto funkcím funkce inverzní. Avšak i takových intervalů je více a my si z nich vybíráme tak, aby příslušné inverzní funkce byly co nejjednodušší.

3. Tak např. funkce sin je prostá na $[-\pi/2, \pi/2]$, je na tomto intervalu rostoucí a spojitá, a má tam vlastní derivaci. K tomu nyní opět použijeme již dokázaná lemmata o inverzních funkcích.

Příklad 6.6.10. Protože $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ a nabývá na tomto intervalu obou extrémních hodnot, je

$$\sin : [-\pi/2, \pi/2] \overset{\text{na}}{\to} [-1, 1]\,,$$

neboť sin je spojitá funkce. Víme též, že sin je na tomto intervalu rostoucí a má na něm vlastní derivaci. Ta je nenulová, v krajních bodech má sin pouze jednostranné derivace, které jsou rovny 0. Proto je inverzní funkce, která se značí arcsin (čteme „arkus sinus“), definována na intervalu $[-1, 1]$, je tam rostoucí a spojitá,

$$\arcsin : [-1, 1] \overset{\text{na}}{\to} [-\pi/2, \pi/2]$$

a v $(-1, 1)$ platí

$$\arcsin'(y) = \left(\sqrt{1-y^2}\right)^{-1}\,.$$

Často se vzorec píše ve tvaru $(\arcsin y)' = \cdots$; význam tohoto zjednodušeného zápisu je zřejmý. Odvodíme poslední vzorec; označme $y = \sin x$ a spočtěme

$$\begin{aligned} 1 = (x)' = (\arcsin\circ\sin)'(x) = \arcsin'(y)\cdot\cos x = \\ = \arcsin'(y)\cdot\sqrt{1-\sin^2 x} = \arcsin'(y)\cdot\sqrt{1-y^2}\,. \end{aligned}$$

Poznámka 6.6.11. Funkci arcsin můžeme využít k popisu řešení rovnice $\sin x = y$, určitá opatrnost je však nutná. Je-li $y \in \mathbb{R}\setminus[-1, 1]$, rovnice nemá řešení. Pro $y \in [-1, 1]$ však takových řešení existuje *nekonečně mnoho* a rovnice $x = \arcsin y$ popisuje pouze jedno z nich. Situace je proto složitější: x je řešením rovnice, právě když je

$$x \in \{\arcsin y + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\arcsin y + (2k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Inverzní funkce k sin na jiném (maximálním) intervalu, na kterém je funkce sin prostá, není arcsin, ale funkce podobná: např. pro restrikci sin na interval $[\pi/2, 3\pi/2]$ je to funkce $\pi - \arcsin x$ a pro restrikci na interval $[3\pi/2, 5\pi/2]$ je inverzní funkcí funkce $\arcsin x + 2\pi$.

Příklad 6.6.12. Nechť arccos (čteme „arkus kosinus“) je inverzní funkce k funkci cos na intervalu $[0, \pi]$. Potom je na intervalu $[-1, 1]$ funkce arccos zřejmě spojitá, klesající a platí

$$\arccos'(y) = -\left(\sqrt{1-y^2}\right)^{-1}\,,\quad y \in (-1, 1)\,.$$

Tento vzorec se odvodí analogicky jako vzorec pro derivování funkce arcsin. Dále platí

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2\,,\quad x \in [-1, 1]\,. \tag{6.22}$$

K tomu stačí zjištění, že výraz na levé straně rovnice má na intervalu $(-1, 1)$ nulovou derivaci, takže je to konstantní funkce.

Poznámky 6.6.13. 1. Připomeňme, že derivace funkce sin, tj. cos, je nenulová na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$, takže výpočet derivace funkce arcsin pomocí derivování složené funkce byl korektní. Podobně i pro funkci arccos existenci derivace zaručuje opět Lemma 6.4.4 o derivování inverzní funkce.

2. Máme-li tedy zavedenu funkci arcsin, není již zavedení funkce arccos s ohledem na vztah (6.22) tak naléhavě důležité. Užitečnost této funkce souvisí totiž převážně s hledáním takové funkce, která po zderivování dá $1/\sqrt{1+x^2}$.

3. Jednostranné derivace funkcí arcsin a arccos krajních bodech intervalů, na nichž jsou definovány, jsou nevlastní a lze je spočítat podle Poznámky 6.4.6. Později si v Kapitole 7 ukážeme pohodlnější způsob výpočtu; viz Věta 7.1.2.

Poznámka 6.6.14. Vzorci typu $\arcsin(x + y) = \ldots$, podobnými součtovým vzorcům pro goniometrické funkce, se nebudeme zabývat; zajímavější je situace s trochu odlišnými vzorci typu $\arcsin x + \arcsin y = \ldots$. Jeden na ukázku odvodíme. Z rovností, platných pro $x_1, x_2 \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned} y_1 &= \arcsin x_1 \quad (\text{resp. } \sin y_1 = x_1,\quad \cos y_1 = \sqrt{1-x_1^2}) \quad \text{a} \\ y_2 &= \arcsin x_2 \quad (\text{resp. } \sin y_2 = x_2,\quad \cos y_2 = \sqrt{1-x_2^2}) \end{aligned}$$

dostaneme pomocí vztahu

$$\sin(y_1 + y_2) = \sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2$$

mechanickým výpočtem hodnot arcsin výrazů na obou stranách rovnosti po dosazení rovnost

$$\begin{aligned} \arcsin x_1 + \arcsin x_2 &= \arcsin\left(x_1\sqrt{1-x_1^2} + x_2\sqrt{1-x_2^2}\right) = \\ &=: \arcsin\left(Z(x_1, x_2)\right)\,. \end{aligned}$$

Ta však platí pouze s jistými omezeními. Hodnoty arcsin tvoří interval $[-\pi/2, \pi/2]$ a součet dvou takových hodnot vyplní interval $[-\pi, \pi]$. Proto je též někdy odlišný od $Z(x_1, x_2)$. Spokojíme se pouze s výsledkem, detailní odvození nebudeme provádět:

$$\arcsin x_1 + \arcsin x_2 = \begin{cases} \arcsin Z(x_1, x_2)\,, & \text{pro } (x_1 x_2 \le 0) \vee (x_1^2 + x_2^2 \le 1)\,, \\ \pi - \arcsin Z(x_1, x_2)\,, & \text{pro } (x_1, x_2 > 0) \wedge (x_1^2 + x_2^2 > 1)\,, \\ -\pi - \arcsin Z(x_1, x_2)\,, & \text{pro } (x_1, x_2 < 0) \wedge (x_1^2 + x_2^2 > 1)\,. \end{cases}$$

Příklad 6.6.15. Funkce arctg (čteme „arkus tangens“) je definována jako inverzní funkce k funkci tg na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Zformulujeme důsledky dokázaných tvrzení pro tuto funkci: platí

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \overset{\text{na}}{\to} (-\pi/2, \pi/2)\,.$$

Funkce arctg je rostoucí a je

$$\operatorname{arctg}'(y) = 1/(1+y^2)\ , \quad y \in \mathbb{R}\ . \tag{6.23}$$

Ukažme si pouze odvození posledního vzorečku: lze použít vzorce pro derivování složené funkce (obě skládané funkce mají vlastní nenulové derivace) a je

$$1 = (x)' = (\operatorname{arctg} \circ \operatorname{tg})'(x) = \operatorname{arctg}'(y) \cdot (\cos^2 x)^{-1} =$$
$$= \operatorname{arctg}'(y) \cdot \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\right) = \operatorname{arctg}'(y)(y^2+1)\ .$$

Poznamenejme, že opět je běžný zápis (6.23) ve tvaru $(\operatorname{arctg} y)' = \cdots$.

Příklad 6.6.16. Ani funkce arctg není na předcházejících funkcích nezávislá. Pro všechna $x \in (-1,1)$ platí

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ .$$

To lze dokázat již standardním postupem: zderivujeme-li rozdíl funkcí na obou stranách rovnice, vidíme, že je konstantní (derivace je rovna 0). Avšak obě funkce nabývají v bodě 0 hodnoty 0, je tedy tato konstantní funkce rovna také 0. Pro tvar svojí derivace je funkce arctg užitečná při hledání tzv. primitivních funkcí, s nimiž se setkáte v Kapitole 8.

Poznámka 6.6.17. Inverzní funkce k funkci cotg na intervalu $(0,\pi)$ se značí arccotg (čteme „arkus kotangens") a není příliš zajímavá. Snadno si samostatně dokážete, že $\operatorname{arccotg} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$ je spojitá, klesající funkce, pro kterou platí na $\mathbb{R}$

$$\operatorname{arccotg}'(x) = -1/(1+x^2)\ .$$

Stejně snadno dokážete vztah

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \pi/2\ .$$

Poznámka 6.6.18. Snadno ověříme, že také funkce sinh je rostoucí spojitá funkce na $\mathbb{R}$, která zobrazuje $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Existuje tedy opět inverzní funkce, která se značí argsinh. Její význam tkví ve vztahu k jiným funkcím; výpočtem její derivace a srovnáním s Příkladem 6.5.16 dostaneme totiž

$$(\operatorname{argsinh} x)' = (\log(x + \sqrt{x^2-1})' = 1/(\sqrt{x^2-1})\ ,$$

pro další výklad však stačí si zapamatovat pouze ekvivalentní vyjádření funkce pomocí logaritmu, resp. přímo vzorec z Příkladu 6.5.16

$$\left(\log|x + \sqrt{x^2 \pm 1}|\right)' = \left(\sqrt{x^2 \pm 1}\right)^{-1}\ .$$

Poznamenejme na závěr, že zavádění elementárních transcendentních funkcí na úrovni střední i vysoké školy je vždy složitým pedagogickým problémem, neboť je nutné je z různých důvodů zavádět zpravidla dříve, než je k dispozici potřebné teoretické zázemí; podrobněji viz [10]. Postup, který jsme zvolili, není nejkratší, používá však aparát, s nímž

se vyspělejší středoškolák může seznámit. Jeho další předností je, že se lze odvolat na všechny vlastnosti goniometrických funkcí, známé ze střední školy, kde se odvozují vzorce právě z těch vztahů, které jsme užili v definici. Doporučujeme čtenáři, aby si samostatně sestavil např. tabulku derivací zavedených funkcí. Součástí tohoto úkolu je vytvoření vlastního systému a mnemotechnických pomůcek k zapamatování, vlastní tabulka pak nemá již velikou cenu, neboť řadu vzorců je nutno umět zpaměti.

Historické poznámky 6.6.19. Klasifikace a terminologie, kterou jsme uvedli (mocniny, polynomy, racionální funkce), pochází od Leonharda Eulera (1707 – 1783). Transcendentní funkce, které jsme zavedli, se objevily velmi dávno ve formě tabulek. U Claudia Ptolemaia (asi 100 – asi 178), který navázal na babylónská astronomická pozorování, nacházíme tabulky *délek tětiv* kružnice. Pokusme se stručně naznačit, co znamená zápis

$$\text{tet}\,36° = 37^p\ 4'\ 55''\ .$$

V kružnici o poloměru r (načrtněte si obrázek) uvažujme tětivu AB příslušnou středovému úhlu $\measuredangle ASB = 2\alpha$; její délka $\text{tet}\,2\alpha$ vyjádřená „v šedesátinách poloměru r" je tedy

$$\left(37 + \frac{4}{60} + \frac{55}{60 \cdot 60}\right) \cdot \frac{r}{60}\ .$$

Označme C střed tětivy AB. Pak, jak snadno nahlédneme, platí rovnosti

$$\sin\alpha = BC/BS = AB/2r = (\text{tet}\,2\alpha)/120\ ,$$

takže tabulky délek tětiv byly v podstatě tabulkami goniometrických funkcí. Ptolemaios, jehož hlavní dílo *Syntaxis mathematica* je známější pod názvem arabského překladu *Almagest*, měl takové tabulky s krokem půl stupně pro rozmezí 0° – 180°. Je pravděpodobné, že vzorem jeho tabulek byly tabulky Hiparchovy (asi 180 – 125 před n. l.), které se však nezachovaly. Poznamenejme, že obecný význam periodicity funkcí si uvědomil patrně v celé šíři teprve Henri Poincaré (1854 – 1912), který ji též podrobněji studoval.

Již v úvodní kapitole jsme reprodukovali Archimedovy výpočty vedoucí k odhadům čísla π. Zde jen poznamenejme, že např. Euler udává na základě výpočtů, které provedli dříve jiní, π na více než 100 desetinných míst (s chybou na 113. místě). Vzorce, které jsme použili k definici goniometrických funkcí, tj. v podstatě součtové vzorce pro sin a cos, uvádějí již Ptolemaios cca v r. 150 a později také Johann Müller (Regiomontanus) (1436 – 1476). Francois Viète (1540 – 1603) znal již vzorce pro $\sin nx$. Termín *trigonometrie* pochází od Bartolomea Pitisca (1561 – 1613).

O vznik prvních logaritmických tabulek se zasloužili všestranně nadaný skotský šlechtic John Napier (1550 – 1617), švýcarský jemný mechanik, hodinář a výpočtář Jost Bürgi (1552 – 1632) a anglický matematik Henry Briggs (1561 – 1630), mezi zmíněnými jediný „profesionál". Jejich idea usnadnění výpočtů se však objevovala již dříve. Tak např. počtář Paul Wittich (? – ?), který pracoval v r. 1582 na Hvaru si práci na výpočtech pro dánského astronoma Tycho de Brahe (1546 – 1601) usnadňoval při násobení užíváním vzorečku

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]\ .$$

Připomeňme si, že Tycho de Brahe je pohřben v Praze v Týnském chrámu [8]. Bürgi prováděl složité astronomické výpočty pro JOHANNA KEPLERA (1572 – 1630). Bürgiho tabulky byly publikovány r. 1620. To vše se odehrávalo v době krátce před objevem prvního (mechanického) počítacího stroje, který navrhl a skutečně i zkonstruoval r. 1642 BLAISE PASCAL (1623 – 1662).

Musíme se ještě podrobněji zmínit o Keplerovi, který přišel r. 1600 do Prahy a stal se po smrti Tycho de Brahe dvorním hvězdářem Rudolfa II. Kepler používal Napierovy tabulky od r. 1614; velmi mu usnadnily numerické výpočty. Kepler později sám vydal jiné logaritmické tabulky r. 1624, zpočátku patrně silně závislé na Napierových (srv. [5]). I když Kepler učinil v Praze mnoho objevů, po smrti Rudolfově r. 1612 odešel, patrně z náboženských důvodů, z Prahy do Lince. Mnoho dalších informací o historii logaritmů lze nalézt např. v [5] a také v [9].

Našemu přístupu předcházely jiné způsoby zavedení elementárních funkcí, které se objevily např. již v pracích ISAACA NEWTONA (1642 – 1727). Exponenciálu jsme zavedli kombinací způsobů, které mají kořen v postupech Eulera a LOUISE AUGUSTINA CAUCHYHO (1789 – 1857). FLORIMON DEBEAUNE (1601 – 1652) zformuloval geometricky již v r. 1638 úlohu o křivce, jejíž tečna v libovolném bodě má směrnici rovnou hodnotě funkce v tomto bodě. Přestože úloha vzbudila zájem předních soudobých matematiků, teprve GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1716) navrhl její řešení.

Euler se zabýval úlohami typu „*Jestliže velikost populace v jisté oblasti vzrůstá ročně o jednu třicetinu a činí v určitém roce 100000 obyvatel, jaká bude její velikost po 100 letech*“ (tato je z práce z r. 1778), které ho dovedly až ke zkoumání výrazů tvaru

$$(1+\omega)^N \ ,$$

kde ω je malé a N velmi veliké (kladné) číslo. Srovnejte s ukázkou z Poznámky 3.2.7.

Newton (1669) i Leibniz (1676) znali rozvoj exponenciály v mocninnou řadu (viz Kapitola 16); zdá se, že i termín *exponenciální* zavedl Leibniz. Užití *funkcionálních rovnic* pochází z Cauchyovy již mnohokrát citované práce [2] z r. 1821. Za zmínku stojí fakt, že aditivní funkce jsou při splnění mnohem slabších podmínek, než jsme výše uvedli, lineární a tedy „velice pěkné“. Pokud tento případ nenastává, jsou naopak „velmi ošklivé“. Historicky první funkcionální rovnicí tvaru

$$f(x+y)-f(x-y)=g(x)h(y)$$

se zabýval kolem roku 1750 JEAN DE LA ROND D'ALEMBERT (1717-1783) v souvislosti s vyšetřováním chvění strun. Napsal o funkcionálních rovnicích tři práce, z nichž poslední byla věnována skládání sil. Z jednoduchých, fyzikálně velmi přirozených požadavků, odvodil „rovnoběžníkové pravidlo“ pro skládání sil. Pokud se chcete seznámit s úvahami tohoto typu, naleznete je např. v [4], str. 33. Pro velikosti sil a úhly mezi jejich směry dospěl k rovnici tvaru

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\ , \quad x,y\in\mathbb{R}\ ,$$

což je, jak již bylo řečeno, jedna Cauchyova funkcionální rovnice (někdy se tímto názvem označuje právě tato rovnice), a k rovnici

$$g(\alpha+\beta)+g(\alpha-\beta)=2g(\alpha)g(\beta)\ , \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}\ .$$

[8] Jak Brahe tak i Bürgi žili v Praze, Brahe od roku 1599 do smrti r. 1601 a Bürgi v letech 1603 – 1622.

Této rovnici se dnes zpravidla říká d'Alembertova funkcionální rovnice. Obě tyto rovnice a také další, kterými jsme se v této kapitole zabývali, studoval později systematicky Cauchy. JEAN GASTON DARBOUX (1842 – 1917), který byl od r. 1900 sekretářem francouzské akademie, dokázal již r. 1880 následující tvrzení: *Každá aditivní funkce, která je nezáporná (resp. nekladná) pro všechna (dostatečně malá)* $x>0$, *je již lineární, tj.* $f(x)=ax$ *pro jisté* a.

Po delší dobu však nebylo jasné, zda nějaké nespojité aditivní funkce vůbec existují. Že tento případ opravdu nastává, dokázal GEORG CARL WILHELM HAMEL (1877 – 1954) až v r. 1905. Rovnici pro aditivní funkce elegantním způsobem zobecnil JAN VILÉM PEXIDER (1874 – 1914). Řešil rovnici s více neznámými funkcemi tvaru

$$f(x+y)=g(x)+h(y)\ , \qquad x,y\in\mathbb{R}\ ;$$

podobně se dají modifikovat i ostatní Cauchyovy rovnice. Funkcionální rovnice jsou jednou z možných partií, které lze probírat v zájmových rozšířeních standardní výuky matematiky. Jak jsme ukázali, jsou funkcionální rovnice *i na této úrovni velmi užitečné.* Viz též [4].

Vztah funkcí a jim „podobných“ řad byl patrně ve své názorné podobě znám poměrně dlouho; ukázali jsme si to pro případ hyperboly popsané funkcí $f(x)=1/x$ a harmonické řady. Později se k tomuto vztahu vrátíme. Poznamenejme, že již r. 1647 dokázal exhaustivní metodou jezuita GREGORIUS A SANTO VINCENTIO (1584 – 1667), že plocha pod grafem větve rovnoosé hyperboly má charakteristickou vlastnost logaritmů; souvislosti s logaritmem si však povšiml teprve o dva roky později jeho žák ALFONS ANTON DE SARASA (1618 – 1667)). Označíme-li symbolem $J_{a,b}$ pro $0<a<b$ obsah obrazce omezeného přímkami a křivkou o rovnicích $y=0$, $x=a$, $x=b$ a $xy=1$, $x\in(0,\infty)$, platí pro všechna $t>0$

$$J_{a,b}=J_{ta,tb}\ ;$$

odtud dostáváme pro $x,y\in(0,\infty)$

$$J_{1,xy}=J_{1,x}+J_{1,y}\ .$$

Pro $f(x)=J_{1,x}$ tak dostaneme funkcionální rovnici

$$f(xy)=f(x)+f(y)\ , \qquad x,y\in(0,\infty)\ .$$

Není to tak obtížné, čtenář se o tom může přesvědčit nahlédnutím do [6]. Vzorec, který objevil NICOLAUS KAUFMANN (MERCATOR) (1620 – 1687) v r. 1668 a který my odvodíme později, dává souvislost logaritmu a řady:

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots\ .$$

Poznamenejme, že existenci integrálu k funkci $(1+x)^{-1}$, resp. funkce k této funkci primitivní, není obtížné dokázat (integruje se *monotónní* spojitá funkce, nepotřebujeme tedy hlubší větu o stejnoměrné spojitosti); viz ještě dále. Tudy vede cesta k zavedení logaritmu pomocí primitivní funkce. Tento přístup, který propagoval FELIX KLEIN (1849 – 1925), byl populární v šedesátých letech tohoto století i u nás, ovšem na vysokoškolské úrovni; viz [7]. V nejschůdnější formě přes „plochu pod grafem“ je pracný, ale zvládnutelný i na úrovni střední školy, např. v rámci nepovinné výuky; srovnej s [6].

Cesta k elementárním goniometrickým funkcím by byla nejschůdnější prostřednictvím exponenciální funkce, avšak *v komplexním oboru* přes Eulerovy vzorce. Tento přístup prakticky nelze studentům na úrovni střední školy přiblížit, proto jsme zvolili jinou cestu. Jejím nedostatkem je fakt, že se k existenci a jednoznačnosti dostaneme později, předností je soulad s látkou střední školy. Tak odpadá zdlouhavé odvozování vzorců, jejichž znalost si studenti přinesou na vysokou školu. K možnostem zavedení goniometrických funkcí pomocí exponenciály se dostaneme v Poznámce 11.5.9.

Hyperbolické funkce zavedl r. 1757 VINCENCIO RICATTI (1707 – 1775), jejich standardní značení pochází od JOHANNA HEINRICHA LAMBERTA (1728 – 1777). Jejich první tabulky se objevily r. 1890. Grafem funkce cosh je křivka, která se nazývá *řetězovka*.

Vyšetření souvislosti logaritmu s harmonickou řadou provedl Euler, který r. 1734 ukázal, že konverguje posloupnost o členech

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\ .$$

Její limitu nazýváme na jeho počest *Eulerovou konstantou*. Její hodnotu určil Euler na 15 desetinných míst: $\gamma = 0.577215664901532$. Protože ji později LORENZO MASCHERONI (1750 – 1800) spočetl na 32 desetinných míst (pouze 19 však bylo správně spočteno), užívá se často název *Euler-Mascheroniova konstanta*. Dodnes se *neví*, zda je γ racionální nebo iracionální číslo. Za zmínku stojí i velmi efektivní výpočty hodnoty γ, které provedl autor programu TeX DONALD KNUTH (1938 –). Poznamenejme, že TeX je nejdokonalejší program pro sazbu složitých, zejména matematických textů.

Literatura:

[1] Barner, M., Flohr, F.: *Analysis I*, Walter de Gruyter, Berlin, 1987.

[2] Cauchy, L. A.: *Course d'analyse de l'École Royal Polytechnique*, Paris, 1821.

[3] Černý, I.: *Matematická analýza, 1. část*, Technická univerzita Liberec, Liberec, 1995. (Existují tři části.)

[4] Davidov, L.: *Funkcionální rovnice*, Mladá fronta, Praha, 1984. (vydal ÚV Matematické olympiády.)

[5] Goldstine, H. H.: *A history of numerical analysis from the 16th through the 19th century*, Springer, New York, 1977.

[6] Klambauer, G.: *Aspects of Calculus*, Springer, Berlin, 1986.

[7] Klein, F.: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*, Springer, Berlin, 1908.

[8] Studnička, F. J.: *Základové vyšší mathematiky, D 1: O počtu differenciálním*, Nákladem spisovatelovým, Praha, 1868.

[9] Tropfke, J.: *Geschichte der Elementar-Mathematik I. - IV.*, Walter de Gruyter, Berlin, 1930. (3. vydání.)

[10] Veselý, J.: *Existuje královská cesta k exponenciále a logaritmu?*, Učitel matematiky, (4/2(18)), str. 65 – 80, (4/3(19)), str. 129 – 145, JČMF, Praha, 1996.

Kapitola 7

Užití derivací

7.1 Některé doplňky

Začneme jedním užitečným lemmatem pro výpočet jednostranných derivací. Ukážeme si na příkladě, že situace může být dosti složitá a pak se pokusíme vypozorovat určité zákonitosti.

Poznámka 7.1.1. Odvodili jsme vzoreček

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\ , \quad y \in (-1,1)\ ,$$

a konstatovali, že v krajních bodech definičního oboru jsou obě jednostranné derivace rovny $+\infty$, tj.

$$\arcsin'_+(-1) = \arcsin'_-(1) = +\infty\ .$$

Platí tedy

$$\lim_{y\to 1_-} \arcsin'(y) = \arcsin'_-(1)\ .$$

Jde o náhodu nebo o hlubší zákonitost? Začátečníkům se často nedaří představit si funkci, která má všude vlastní derivaci, ale $x \mapsto f'(x)$ není spojitá. Definujme

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x^2) & , \quad x \neq 0\ , \\ 0 & , \quad x = 0\ . \end{cases}$$

Pak platí

$$f'(x) = 2x\sin(1/x^2) - (2/x)\cos(1/x^2)\ , \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ .$$