Stochastické diferenciální rovnice

Jakub Staněk

KDM – MFF UK, Praha

Aplikace matematiky pro učitele

15.11.2011

Model pro nemoc s rychlým šířením a krátkou dobou léčby.
Příkladem takovéto nemoci je chřipka.
Předpokládáme konstantní velikost populace N, která je rozdělena do tří skupin:

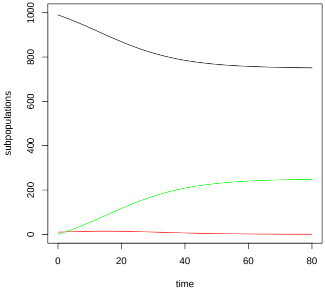
- $x_t \ldots$ zdraví jedinci, kteří mohou být nakaženi,
- $y_t \ldots$ nakažení jedinci, kteří mohou šířit danou nemoc,
- $z_t \ldots$ jedinci, kteří nemohou nemoc šířit ani nemohou být znovu nakaženi.

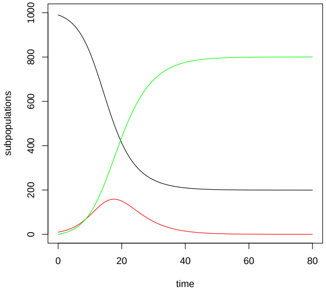
Tento model je popsán následující diferenciální rovnicí:

$$
\begin{aligned}
dx_t &= -\beta x_t y_t dt \\
dy_t &= \beta x_t y_t dt - \gamma y_t dt \\
dz_t &= -\gamma y_t dt.
\end{aligned}
$$

kde

- β značí intenzitu přenosu nemoci a
- γ je intenzita léčby (tj. $\frac{1}{\gamma}$ popisuje střední dobu trvání nemoci).





Průběh epidemie s parametry $\beta = 0.0005$, $\gamma = 0.45$ (levý obrázek) a $\beta = 0.0005$, $\gamma = 0.25$ (pravý obrázek).

Tento model je zobecněním předchozího modelu. Uvažujeme obecnější formu intenzity šíření nemoci β a vakcinační funkci $\vartheta(.)$. Model je popsán následující diferenciální rovnicí:

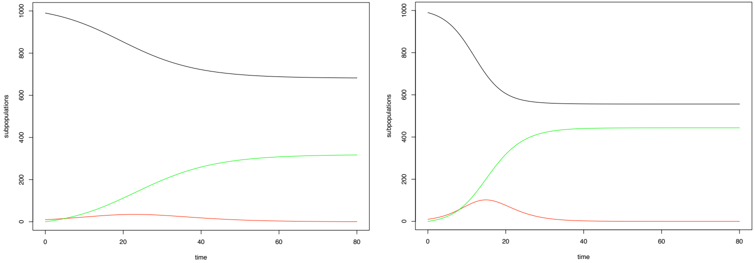
$$\begin{aligned} dx_t &= -\beta(z_t)[x_t - \vartheta(z_t)]^+ y_t dt \\ dy_t &= \beta(z_t)[x_t - \vartheta(z_t)]^+ y_t dt - \gamma y_t dt \\ dz_t &= -\gamma y_t dt. \end{aligned}$$

Lze ukázat, že z_∞ je řešením rovnice:

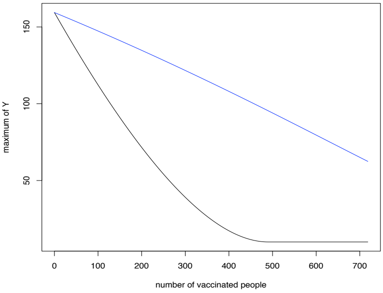
$$z = N - X(z),$$

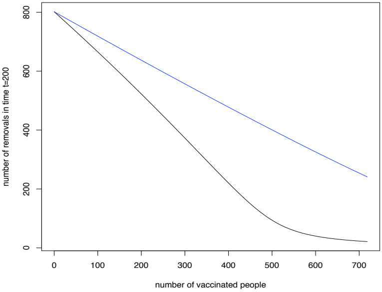
kde

$$X(z) = \left[x^0 + \int_0^z \frac{\beta(u)}{\gamma}\vartheta(u)\exp\left\{\frac{\int_0^u \beta(s)ds}{\gamma}\right\}du\right] \cdot \exp\left\{\frac{-\int_0^z \beta(u)du}{\gamma}\right\}.$$



Průběh epidemie s různou vakcinační strategií. Levý obrázek ukazuje vývoj s $\vartheta(z) = 300 + 0.2z$, pravý obrázek s $\vartheta(z) = z$. Celkově 363 vakcinovaných jedinců v prvním případě a 443 jedinců v druhém případě.





Na obrazcích je znázorněn efekt vakcinace (modrá čára) a předvakcinace (černá čára) vzhledem k maximálnímu počtu nakažených jedinců (obrázek vlevo) a celkovému počtu nakažených jedinců (obrázek vpravo).

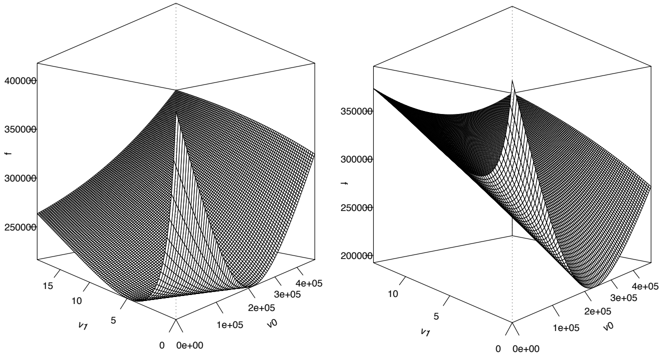
Pro určení optimální vakcinační strategie zvolme následující penalizační funkci:

$$f = c(y_T + z_T) + c_0\vartheta_0 + c_1\vartheta_1,$$

kde

- $y_T + z_T$ ... počet lidí, kteří byli infikováni do času T,
- ϑ_0 ... počet jedinců, kteří dostali vakcínu před začátkem epidemie,
- ϑ_1 ... počet jedinů navakcinovaných během časového intervalu $(0, T)$,
- c ... penalizace za jednoho nakaženého jedince,
- c_0, c_1 ... penalizace za předvakcinaci, resp. vakcinaci, jednoho jedince.

V našem případě hladáme optimální lineární vakcinační strategii, tj. $\vartheta(z) = v_0 + v_1 z$.



Na obrazcích je znázorněna penalizační funkce f v závislosti na volbě koeficientů lineární vakcinace v_0 a v_1. Vlevo jsou zvoleny penalizační koeficienty $c_0 = 0.607$ a $c_1 = 0.3061$, vpravo $c_0 = c_1 = 0.5$.

Nechť $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, pak množinu náhodných veličin $(X(t), t \geq 0)$ definovaných na tomto pravděpodobnostním prostoru nazveme náhodným procesem. Na náhodný proces lze také nahlížet jako na zobrazení

$$X(t, \omega) : \mathbb{R}^{+} \times \Omega \to \mathbb{R},$$

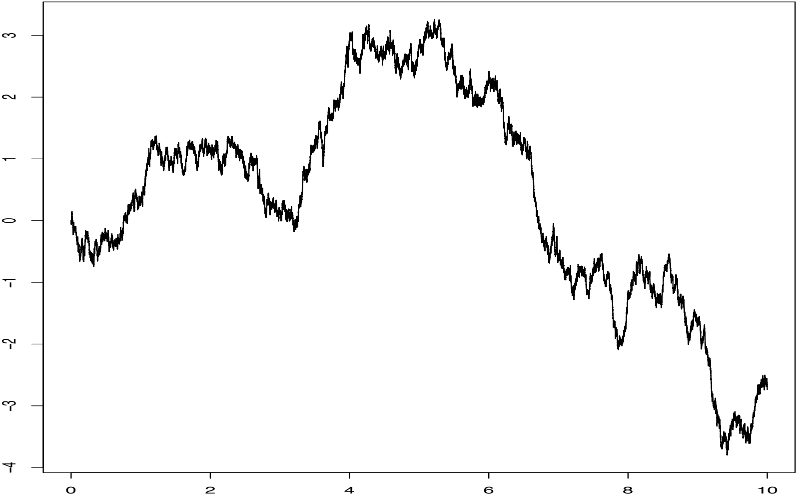
popřípadě

$$X(., \omega) : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}^{+}}.$$

$X(., \omega)$ se nazýva trajektorie procesu X.

Wienerův proces (Brownův pohyb) W_t je náhodný proces s následujícímy vlastnostmi:

- $W_0 = 0$ skoro jistě,
- Wienerův proces má nezávislé přírůstky,
- rozdělení Wienerova procesu v čase t je $N(0, t)$,
- Wienerův proces má spojité trajektorie.


3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0
2
4
6
8
10

Stochastický integrál $\int_a^b X(t)dW(t)$ si lze velmi zjednodušeně představit jako limitu

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i))$$

kde $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ a $t_{i+1} - t_i = \Delta$.

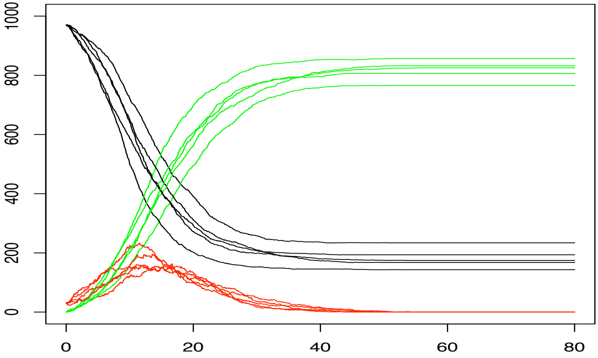
Stochastický proces X_t je řešením stochastické diferenciální rovnice

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x_0,$$

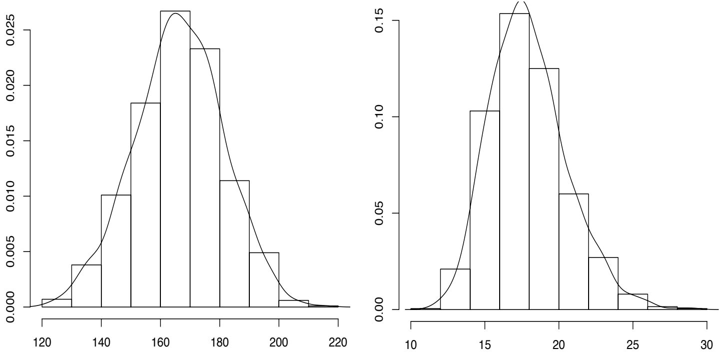
pokud

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s.$$

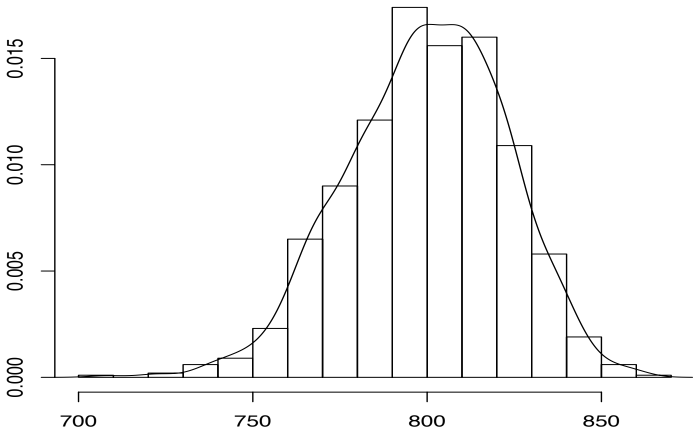
$$
\begin{aligned}
dX_t =& -\beta(Z_t)Y_t[X_t-\vartheta(Z_t)]^+dt+\sqrt{\beta(Z_t)Y_t[X_t-\vartheta(Z_t)]^+}dW_t,\\
dY_t =&\beta(Z_t)Y_t[X_t-\vartheta(Z_t)]^+dt-\gamma Y_t dt\\
&-\sqrt{\beta(Z_t)Y_t[X_t-\vartheta(Z_t)]^+}dW_t,\\
dZ_t =&\gamma Y_t dt,
\end{aligned}
\tag{1}
$$



Pět realizací řešení stochastické diferenciální rovnice (1).



Na levém obrázku je znázorněn histogram a odhad hustoty maximálního počtu nakažených jedinců, vpravo je histogram a odhad hustoty času kulminace epidemie.



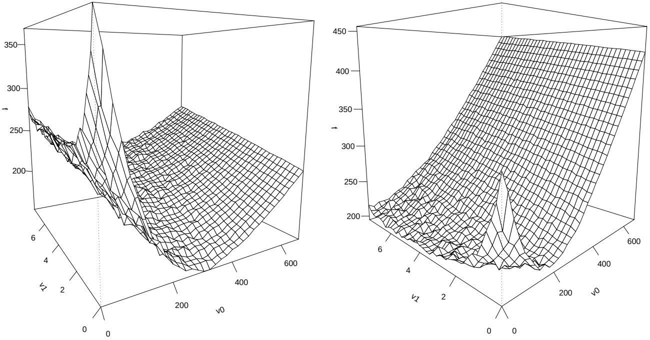
Histogram celkového počtu nakažených jedinců během epidemie.

K určení optimální vakcinační strategie zvolme následující penalizační funkci:

$$f = E[c(Y_T + Z_T) + c_0\vartheta_0 + c_1 V_1 + c_2 T_{ep}],$$

kde

- $Y_T + Z_T$ ... počet lidí, kteří byli infikováni do času T,
- ϑ_0 ... počet jedinců, kteří dostali vakcínu před začátkem epidemie,
- V_1 ... počet jedinů navakcinovaných během časového intervalu $(0, T)$,
- T_{ep} ... délka časového intervalu, po který bylo nakaženo více než 5% populace,
- c ... penalizace za jednoho nakaženého jedince,
- c_0, c_1 ... penalizace za předvakcinaci, resp. vakcinaci, jednoho jedince,
- c_2 ... penalizace za každý den, po který bylo nakaženo více než 5% populace.

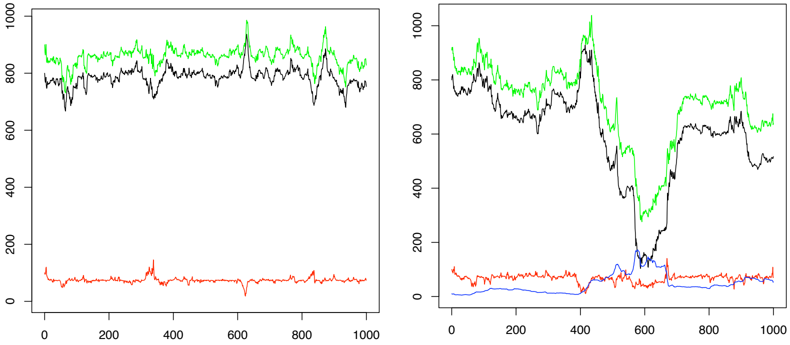


Penalizační funkce $f = E[Z_{150} + 0.3 * \vartheta_0 + 0.4 * \vartheta_1 * Z_{150} + 0.5 * T_{ep}]$ (levý obrázek) a $f = E[Z_{150} + 0.6 * \vartheta_0 + 0.304 * \vartheta_1 * Z_{150}]$ (pravý obrázek).

Mějme populaci, jejíž velikost se v čase mění. Sledujeme vývoj nemoci s více pathogeny, kde očekáváme, že žadný jedinec nemůže být infikován více než jedním pathogenem nemoci.

- N_t... počet jedinců v populaci v čase t,
- X_t... počet zdravých jedincu v čase t,
- Y_t^k... počet jedinců, kteří jsou nakaženi k-tým pathogenem sledované nemoci v čase t,
- b, b_k ... intenzity rození v populaci, $b_k < b, \forall k$,
- $d(N_t), \alpha_k$ ... intenzity vymírání populace,
- β_k ... intenzita přenosu k-tého pathogenu.

$$
\begin{aligned}
dX_t =& X_t\left(b - d(N_t) - \sum_{k=1}^{d}\frac{\beta_k Y_t^k}{N_t}\right)dt \\
&+ \sum_{k=1}^{d} b_k Y_t^k dt + \sum_{k=1}^{d+1} B_{1.k}(X_t, Y_k^1, ..., Y_k^d)dW_t^k, \\
dY_t^j =& Y_t^j\left(b - b_j - d(N_t) - \alpha_j + \frac{\beta_j X_t}{N_t}\right)dt \\
&+ \sum_{k=1}^{d+1} B_{j+1.k}(X_t, Y_k^1, ..., Y_k^d)dW_t^k, \quad j = 1, \ldots, d,
\end{aligned}
$$



Průběh epidemie s jedním patogenem (levý obrázek) a se dvěma patogeny (pravý obrázek).


1 Year Gold
High 1900.30 Low 1314.90
USD per ounce
2000
1900
1800
1700
1600
1500
1400
1300
1200
09Nov
16Dec
24Jan
02Mar
08Apr
17May
23Jun
01Aug
07Sep
14Oct
08Nov
www.kitco.com
Based on New York Close

$$dX_t^0 = \rho(t,\omega)X_t^0 dt, \qquad X_0^0 = 1$$

$$dX_t^i = \mu_i(t,\omega)dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(t,\omega)dW_t^i, \qquad X_0^i = x_0.$$

kde

- X^0... vývoj hodnoty bezrizikového aktiva
- $X^i, i = 1, ..., m$... vývoj hodnoty rizikového aktiva

Označíme $\theta_t = (\theta_t^0, \theta_t^1, \dots, \theta_t^n)$ portfólio v čase t. Pak hodnota tohoto portfólia V_t je dána rovnicí

$$
\begin{aligned}
dV_t &= \theta_t \cdot dX_t = \theta_t^0 dX_t^0 + \sum_{i=1}^{n} \theta_t^i dX_t^i \\
&= \theta_t^0 \rho(t,\omega) X_t^0 dt + \sum_{i=1}^{n} \left(\theta_t^i \mu_i(t,\omega) dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(t,\omega) dW_t^i \right)
\end{aligned}
$$

$$
V_0 = \theta_0^0 + \sum_{i=1}^{n} \theta_0^i x_i .
$$

Velmi často se pro modelování ceny finančních aktiv používá Geometrický Brownův pohyb. Tento proces je dán rovnicí:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x_0.$$

Lze ukázat, že

$$X_t = x_0 \exp\left\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\right\} \quad s.j.$$

Označme

$$p_t = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t$$

a

$$r_t = p_{t+1} - p_t = \ln X_{t+1} - \ln X_t \sim N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2\right).$$

Tedy

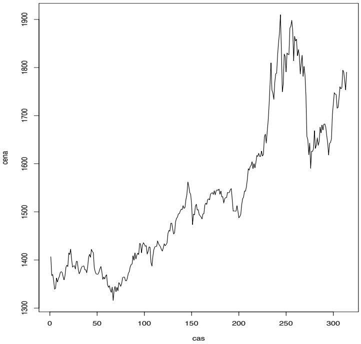
$$\mathbb{E}(r_t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right), \quad \mathrm{var}(r_t) = \sigma^2.$$

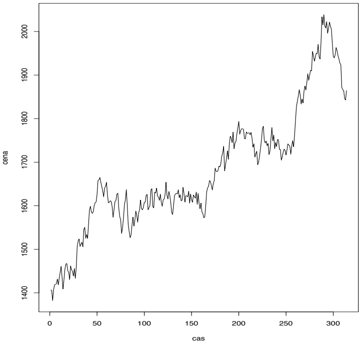
Z odhadů

$$\bar{r} = \sum_{t=1}^{n} r_t, \quad s_r^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n} (r_t - \bar{r})^2,$$

dostaneme

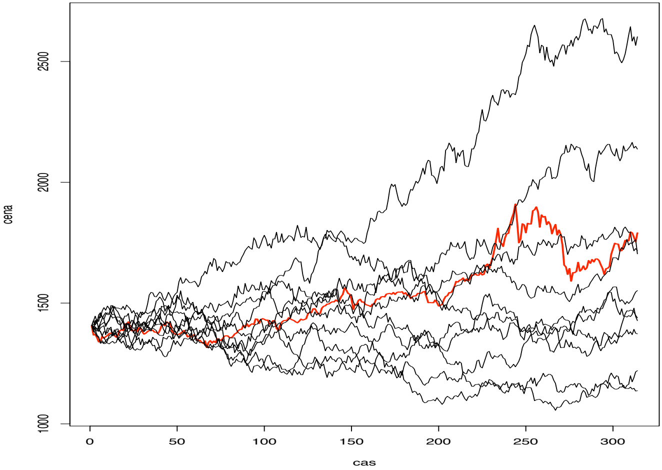
$$\hat{\sigma} = \sqrt{s_r^2}, \quad \hat{\mu} = \bar{r} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}.$$


1300
1400
1500
1600
1700
1800
1900
cena
0
50
100
150
200
250
300
cas


1400
1500
1600
1700
1800
1900
2000
cena
0
50
100
150
200
250
300
cas

Odhad modelu:

$$dX_t = 0.00083506 X_t dt + 0.01134243 X_t dW_t, \quad X_0 = 1406.75$$


cena
2500
2000
1500
1000
0
50
100
150
200
250
300
cas

Uvažujme model trhu:

$$dX_t^0 = \rho X_t^0 dt, \qquad X_0^0 = 1,$$
$$dX_t^1 = \mu X_t^1 dt + \sigma X_t^1 dW_t, \qquad X_0^1 = x_0 > 0,$$

kde

- T... čas splatnosti,
- K... prováděcí cena.

(Fischer Black a Myron Scholes 1973).
Spravedlivá cena call opce je

$$p = x_0\phi(\eta + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}) - Ke^{-\rho T}\phi(\eta - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}),$$

kde

$$\eta = \sigma^{-1}T^{-\frac{1}{2}}\left(\ln\frac{x_0}{K} + \rho T\right)$$

a ϕ je distribuční funkce normovanéno normálního rozdělení.
Nobelova cena pro R. Mertona a M. Scholese 1997.

Uvažujme call opci na unci zlata s dobou splatnosti jeden rok, tedy 11.11.2012 a s prováděcí cenou $K = 1850$ (\$/unci). Použijme model odhadnutý na předchozích slidech, tedy model geometrického Brownova pohybu s parametry $\mu = 0.00083506$ a $\sigma = 0.01134243$, ale s počáteční podmínkou $X_0 = 1790.55$ (tedy s cenou ze dne 11.11.2011). Uvažujeme-li roční výnos u bezrizikového aktiva 3%, pak cena Evropské call opce je 120.11\$.