Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2012/13

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

Načrtněte množinu M omezenou křivkami

$$y^2 = 2x + 1, \qquad y^2 = -4x + 4$$

a vypočtěte její plošný obsah.

Příklad 2 (25 bodů)

Rozhodněte (a řádně zdůvodněte), zda funkce $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ nabývá na množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \leq 1\}$ své nejmenší a největší hodnoty. Pokud ano, vypočtěte je.

Příklad 3 (25 bodů)

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta^{-1} x \exp\{-x^2/(2\theta)\} & x > 0, \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases} \qquad \text{kde } \theta > 0 \text{ je neznámý parametr.}$$

(i) Najděte maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ.
(ii) Spočítejte hustotu X_1^2, určete přesné rozdělení $2n\hat{\theta}_n$ a zjistěte $\mathsf{E}\,\hat{\theta}_n$ a $\mathsf{var}\,\hat{\theta}_n$.
(iii) Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$ pro $n \to \infty$.

Příklad 4 (25 bodů)

Uvažujte aktiva 0, 1, 2. Aktivum 0 je bezrizikové s výnosem $r_0 = 6$, výnosy aktiv 1, 2 jsou náhodné veličiny se středními hodnotami $r_1 = 10$ a $r_2 = 8$ (vše v procentech), s rozptyly $\sigma_1^2 = 4$ a $\sigma_2^2 = 2$. Kovariance mezi výnosy je $\sigma_{12} = 1$. Předpokládejme, že investor investuje bohatství ve výši $W = 1$.

(i) Najděte portfolio P skládající se pouze z rizikových aktiv (tj. aktiv 1, 2) a poskytující očekávaný výnos $r_P = 9\%$.
(ii) Najděte portfolio P skládající se ze všech tří aktiv minimalizující riziko a poskytující očekávaný výnos $r_P = 9\%$. (Rizikem se zde rozumí směrodatná odchylka výnosu portfolia.)

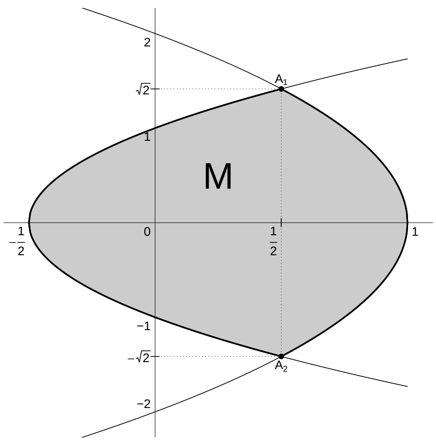
Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2012/13

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

Výpočet plochy můžeme provést pomocí Fubiniovy věty. Integrál z $f(x, y) = 1$ přes danou množinu (= plocha množiny) existuje.



1. způsob

Vypočteme x-ové souřadnice bodů A_1 a A_2, v nichž se křivky omezující množinu M protnou. Dostaneme $x_1 = x_2 = 1/2$. Průmět M_x množiny M do osy x je roven $(-1/2, 1)$. Užitím těchto skutečností dostáváme

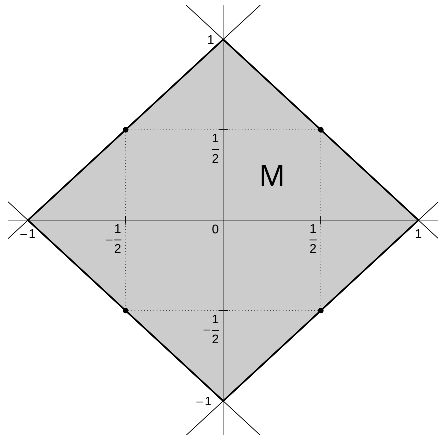
$$\int_M 1\,dx\,dy = \int_{-1/2}^{1/2} \left(\int_{-\sqrt{2x+1}}^{\sqrt{2x+1}} dy \right) dx + \int_{1/2}^{1} \left(\int_{-2\sqrt{1-x}}^{2\sqrt{1-x}} dy \right) dx = 2\sqrt{2}.$$

2. způsob

Vypočteme y-ové souřadnice bodů A_1 a A_2, v nichž se křivky omezující množinu M protnou. Dostaneme $y_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Je tedy průmět M_y množiny M do osy y roven $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Užitím těchto skutečností dostáváme

$$\int_M 1\,dx\,dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\frac{y^2-1}{2}}^{\frac{-y^2+4}{4}} dx \right) dy = 2\sqrt{2}.$$

Příklad 2 (25 bodů)



Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}^2$, tedy i na množině M. Množina M je omezená a uzavřená v $\mathbb{R}^2$. Podle věty, která říká, že funkce spojitá na kompaktní množině nabývá na ní své největší a nejmenší hodnoty, má tedy funkce f na M maximum a minimum. Body, podezřelými z nabývání extrémů, jsou jednak kritické body funkce f, ležící v M^0, jednak body hranice množiny M.

Kritické body uvnitř M:

Z rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - x = 0$$

dostáváme, že jediný kritický bod uvnitř M je bod $[0,0]$. Je $f(0,0) = 0$.

Vyšetření f na hranici M:

V „rohových“ bodech množiny M, tj. $[1,0]$, $[-1,0]$, $[0,1]$ a $[0,-1]$, je funkční hodnota funkce f rovna 1.

Zbývá vyšetřit situaci na množinách $H_1 = \{[x,y];\ x \in (0,1),\ y = 1-x\}$, $H_2 = \{[x,y];\ x \in (0,1),\ y = x-1\}$, $H_3 = \{[x,y];\ x \in (-1,0),\ y = 1+x\}$ a $H_4 = \{[x,y];\ x \in (-1,0),\ y = -1-x\}$. Snadno zjistíme, že další podezřelé body jsou body $[1/2, 1/2]$ a $[-1/2,-1/2]$, resp. $[-1/2, 1/2]$ a $[1/2,-1/2]$. Funkční hodnoty v těchto bodech jsou rovny $1/4$ resp. $3/4$.

Z provedených výpočtů plyne, že funkce f nabývá svého minima na M v bodě $[0,0]$ a je $\min_M f = f(0,0) = 0$ a funkce f nabývá svého maxima na M v bodech $[1,0]$, $[-1,0]$, $[0,1]$ a $[0,-1]$ a je $\max_M f = 1$.

Příklad 3 (25 bodů)

(i)

Věrohodnostní funkce: $$L(\theta) = \theta^{-n}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)\exp\left\{-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right\}$$

Logaritmická věrohodnost: $$\ell(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log X_i - n\log\theta - \frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

Skórová statistika: $$U(\theta) = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

Skórová funkce: $$U_i(\theta) = -\frac{1}{\theta} + \frac{X_i^2}{2\theta^2}$$

Věrohodnostní rovnice: $$U(\hat\theta_n) = 0 \quad \text{a odtud ihned} \quad \hat\theta_n = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

Jediným řešením věrohodnostní rovnice je $\hat\theta_n = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Je to maximálně věrohodný odhad, neboť $\ell(\theta)$ je spojitá a není omezená zdola.

(ii)

Spočítáme hustotu náhodné veličiny $Y = X^2$, kde X má hustotu $f(x;\theta)$. Jelikož $\mathsf{P}[X < 0] = 0$, transformace je prostá. Inversní transformací je $x = \sqrt{y}$, jakobián je $\frac{1}{2\sqrt{y}}$. Náhodná veličina Y má hustotu $g(y;\theta) = (2\theta)^{-1}\exp\{y/(2\theta)\}$. Její rozdělení je tedy $\mathsf{Exp}(1/(2\theta))$, střední hodnota $\mathsf{E}\,Y = \mathsf{E}\,X_i^2 = 2\theta$, rozptyl $\mathsf{var}\,Y = \mathsf{var}\,X_i^2 = 4\theta^2$.

Protože X_i jsou nezávislé a $2n\hat\theta_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$, máme ihned

$$2n\hat\theta_n \sim \Gamma\left(\frac{1}{2\theta}, n\right), \qquad \mathsf{E}\,\hat\theta_n = \frac{1}{2n}\, n\,\mathsf{E}\,X_i^2 = \theta, \qquad \text{a} \quad \mathsf{var}\,\hat\theta_n = \frac{1}{4n^2}\, n\,\mathsf{var}\,X_i^2 = \frac{\theta^2}{n}.$$

(iii)

Jelikož $\hat\theta_n$ je maximálně věrohodný odhad a jsou splněny podmínky regularity, jeho asymptotické rozdělení je $\sqrt{n}(\hat\theta_n - \theta) \xrightarrow{D} \mathsf{N}(0, 1/I(\theta))$, kde Fisherova míra informace je $I(\theta) = \mathsf{E} - \frac{\partial U_i(\theta)}{\partial\theta} = \mathsf{E}\,X_i^2/\theta^3 - 1/\theta^2 = 1/\theta^2$. Máme tedy

$$\sqrt{n}(\hat\theta_n - \theta) \xrightarrow{D} \mathsf{N}(0, \theta^2).$$

Příklad 4 (25 bodů)

Portfolio je soubor finančních aktiv. Je reprezentováno podíly (alokací, diverzifikací), které investor investuje do jednotlivých aktiv. Označíme-li $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_N)^\mathsf{T}$ tyto podíly, pak při investovaném bohatství ve výši 1 musí platit $x_1 + \dots + x_N = 1$.

(i) Označme váhy v porfoliu x_1 a x_2. Musí platit $x_1 + x_2 = 1$. Z toho vyplývá, že pro očekávaný výnos portfolia platí

$$r_P = 10x_1 + 8x_2 = 10x_1 + 8(1 - x_1) = 2x_1 + 8 = 9,$$

a tedy $x_1 = x_2 = 1/2$.

(ii) Označme váhy v porfoliu x_0, x_1 a x_2. Musí platit $x_0 + x_1 + x_2 = 1$. Očekávaný výnos portfolia je tedy

$$r_P = 6x_0 + 10x_1 + 8x_2 = 6 + 4x_1 + 2x_2.$$

Požadujeme očekávaný výnos portfolia $r_P = 9$, takže z poslední rovnice dostaneme

$$x_2 = \tfrac{1}{2}(3 - 4x_1).$$

Jsou-li výnosy rizikových aktiv R_1 a R_2, je rozptyl výnosu portfolia (po dosazení za x_2)

$$\operatorname{var}(x_1R_1 + x_2R_2) = x_1^2 \operatorname{var}(R_1) + 2x_1x_2 \operatorname{cov}(R_1, R_2) + x_2^2 \operatorname{var}(R_2) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = \tfrac{9}{2} - 9x_1 + 8x_1^2.$$

To je konvexní funkce, minimum získáme tak, že položíme první derivaci rovnu nule. Derivací posledního výrazu je $16x_1 - 9$, takže $x_1 = 9/16$. Zpětnými substitucemi do předchozích rovnic dostaneme $x_2 = 3/8$, $x_0 = 1/16$.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2012/13

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Varianta B

Příklad 1 (25 bodů)

Načrtněte množinu M omezenou grafy funkcí

$$y = |x-1|, \qquad y = -|x| + 2.$$

Nechť λ je Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^2$. Vypočtěte

$$\int_M xy \, d\lambda(x,y).$$

Příklad 2 (25 bodů)

Rozhodněte (a řádně zdůvodněte), zda funkce $f(x,y,z) = xy^2z^3$ nabývá na množině $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x + 2y + 3z = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$ své největší a nejmenší hodnoty. Pokud ano, vypočtěte je.

Příklad 3 (25 bodů)

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \qquad \text{kde } \theta > 0 \text{ je neznámý parametr.}$$

(i) Najděte maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ.
(ii) Spočítejte hustotu $-\log X_1$ a zjistěte $\mathsf{E} \log X_1$ a $\mathsf{var} \log X_1$.
(iii) Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$ pro $n \to \infty$.

Příklad 4 (25 bodů)

Kuponová obligace v nominální hodnotě $F = 10$ s roční kuponovou sazbou $C = 1$ splatná přesně za dva roky (tj. zcela jistě po datu exkuponu) se prodává za (tržní) cenu $P = 399/44$ (všechny hodnoty v tisících Kč).

(i) Vyjádřete obecně současnou hodnotu uvedené obligace při hodnotící úrokové míře i.
(ii) Formulujte vztah pro výnos do splatnosti (YTM).
(iii) Vypočtětě výnos do splatnosti s výše uvedenými konkrétními hodnotami.

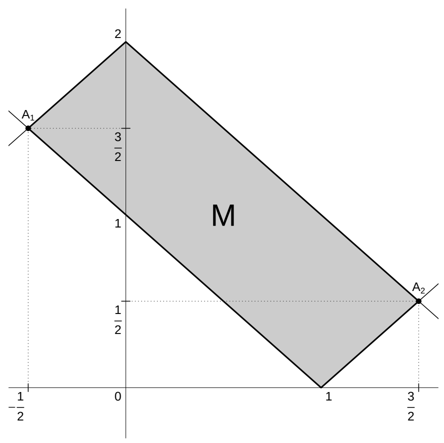
Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2012/13

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Varianta B — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

Vypočteme x-ové souřadnice bodů A_1 a A_2, v nichž se grafy obou funkcí omezujících množinu M protnou. Zjistíme, že průmět M_x množiny M do osy x je $(-1/2, 3/2)$. Snadno vidíme, že $\int_M xy\, d\lambda(x,y)$ existuje.



Výpočet můžeme provést pomocí Fubiniovy věty. Budeme integrovat nejprve podle y, potom podle x. Je-li dáno $x \in (-1/2, 0)$, máme pro y omezení $1 - x < y < 2 + x$. Je-li dáno $x \in (0,1)$, máme pro y omezení $1 - x < y < 2 - x$. Je-li dáno $x \in (1, 3/2)$, máme pro y omezení $x - 1 < y < 2 - x$.

$$\begin{aligned}
\int_M xy\, d\lambda(x,y) &= \int_{-1/2}^{0} \int_{1-x}^{2+x} xy\, dy\, dx + \int_0^1 \int_{1-x}^{2-x} xy\, dy\, dx + \int_1^{3/2} \int_{x-1}^{2-x} xy\, dy\, dx \\
&= \int_{-1/2}^{0} \frac{x}{2} 3(1+2x)\, dx + \int_0^1 \frac{x}{2}(3-2x)\, dx + \int_1^{3/2} \frac{x}{2}(3-2x)\, dx \\
&= \frac{3}{2} \int_{-1/2}^{0} (x + 2x^2)\, dx + \frac{1}{2} \int_0^{3/2} (3x - 2x^2)\, dx = -\frac{1}{16} + \frac{9}{16} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Příklad 2 (25 bodů)

Množina M je omezená a uzavřená v $\mathbb{R}^3$. Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}^3$ a je tedy spojitá i na množině M. Podle věty, která říká, že funkce spojitá na kompaktní množině nabývá na ní své největší a nejmenší hodnoty, má tedy funkce f na M maximum a minimum. Je hned vidět, že funkce f je na množině M nezáporná, přičemž hodnoty 0 nabývá právě v těch bodech množiny M, pro něž je alespoň jedna souřadnice rovna nule. To jsou tedy body minima funkce f na M, přičemž hodnota minima je rovna nule. Je rovněž zřejmé, že bod maxima funkce f na M bude ležet v množině

$$M_1 = \{[x,y,z] \in M;\ x > 0,\ y > 0\ z > 0\ \} \subset M,$$

kde funkce f nabývá kladných hodnot.

K výpočtu bodu maxima užijeme metody Lagrangeových multiplikátorů. Přihlédneme-li k vazební podmínce $x+2y+3z=1$, má Lagrangeova funkce tvar $L(x,y,z,\lambda)=xy^2z^3-\lambda(x+2y+3z-1)$. Protože $\nabla(x+2y+3z)$ je různý od nulového vektoru všude v $\mathbb{R}^3$, je splněna podmínka věty o Lagrangeovýcb multiplikátorech. Budou nás tedy zajímat řešení soustavy čtyř rovnic o čtyřech neznámých x,y,z a λ

$$y^2z^3-\lambda=0, \quad xyz^3-\lambda=0, \quad xy^2z^2-\lambda=0, \quad x+2y+3z=1,$$

a to taková, že bod $[x,y,z]$ leží v množině M_1. Snadno vypočteme, že je to právě jeden bod $[1/6,1/6,1/6]$. Podle zmíněné věty a úvah o znaménku funkce $f(x,y,z)$ je tento bod bodem maxima funkce f na množině M.

Shrneme nyní: $\min_M f=0$, funkce f nabývá této hodnoty ve všech bodech množiny $M\setminus M_1$; $\max_M f=f(1/6,1/6,1/6)=(1/6)^6$.

Příklad 3 (25 bodů)

(i)

Věrohodnostní funkce: $$L(\theta)=\theta^n\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{\theta-1}$$

Logaritmická věrohodnost: $$\ell(\theta)=n\log\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^n\log X_i$$

Skórová statistika: $$U(\theta)=\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^n\log X_i$$

Skórová funkce: $$U_i(\theta)=\frac{1}{\theta}+\log X_i$$

Věrohodnostní rovnice: $$U(\hat\theta_n)=0 \quad \text{a odtud ihned} \quad \hat\theta_n=\left(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\log X_i\right)^{-1}$$

Jediným řešením věrohodnostní rovnice je $\hat\theta_n=\left(-n^{-1}\sum_{i=1}^n\log X_i\right)^{-1}$. Je to maximálně věrohodný odhad, neboť, jak lze snadno ověřit, $\ell(\theta)$ je konkávní.

(ii)

Spočítáme hustotu náhodné veličiny $Y=-\log X$, kde X má hustotu $f(x;\theta)$. Tato transformace je prostá. Inversní transformací je $x=\exp(-y)$, jakobián má absolutní hodnotu $\exp(-y)$. Náhodná veličina Y má hustotu $g(y;\theta)=\theta\exp(-\theta y)$. Její rozdělení je tedy $\mathsf{Exp}(\theta)$, střední hodnota $\mathsf{E}\,Y=-\mathsf{E}\,\log X_i=1/\theta$, rozptyl $\mathsf{var}\,Y=\mathsf{var}\,\log X_i=1/\theta^2$.

(iii)

Jelikož $\hat\theta_n$ je maximálně věrohodný odhad a jsou splněny podmínky regularity, jeho asymptotické rozdělení je $\sqrt{n}(\hat\theta_n-\theta)\xrightarrow{D}\mathsf{N}(0,1/I(\theta))$, kde Fisherova míra informace je $I(\theta)=\mathsf{E}-\frac{\partial U_i(\theta)}{\partial\theta}=1/\theta^2$. Máme tedy

$$\sqrt{n}(\hat\theta_n-\theta)\xrightarrow{D}\mathsf{N}(0,\theta^2).$$

Příklad 4 (25 bodů)

(i) Současnou hodnotu označíme PV. Pro uvedenou situaci platí

$$PV = \frac{C}{1+i} + \frac{C+F}{(1+i)^2}.$$

(ii) Je-li obligace na trhu koupena za hodnotu P, je výnos do splatnosti (označme Y) vlastně vnitřní míra výnosnosti (vnitřní výnosové procento) peněžního toku $(-P, C, C+F)$. Výnos do splatnosti v tomto případě je řešením rovnice

$$P = \frac{C}{1+i} + \frac{C+F}{(1+i)^2}$$

vzhledem k proměnné i.

Z toho plynoucí kvadratická rovnice má dva kořeny, z nichž pouze ten větší má ekonomický smysl:

$$Y = \frac{C - 2P + \sqrt{C^2 + 4CP + 4FP}}{2P}.$$

Alternativně po substituci úroková míra $\rightarrow$ diskontní faktor, tj. $v = \frac{1}{1+i}$ je možné zíkat řešení pro odpovídající diskontní faktor v řešením rovnice pro neznámý diskontní faktor v:

$$P = Cv + (C+F)v^2.$$

(iii) Postup výpočtu pro konkrétní numerické hodnoty:

$$\text{diskriminant} = C^2 + 4\,CP + 4\,FP = 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot \tfrac{399}{44} + 4 \cdot 10 \cdot \tfrac{399}{44} = \frac{11 + 399 + 3990}{11} = 400,$$

odmocnina z diskriminantu je tudíž 20 a výsledná hodnota Y je

$$Y = \frac{1 - 2 \cdot \frac{399}{44} + 20}{2 \cdot \frac{399}{44}} = \frac{3}{19}.$$

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2012/13

Studijní program: Matematika
Studijní obory: MA, MMIB, MMFT, MSTR, NVM, PMSE, MDU

Varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

Vypočtěte

$$\int_M (4y^3 - xy + 4x^3)\, dx\, dy,$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \le x,\ y \ge x^2\}$.

Příklad 2 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \sqrt{x^2 - \frac{1}{x}}.$$

(i) Určete definiční obor funkce f.
(ii) Zkoumejte spojitost funkce f.
(iii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce f.
(iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda funkce f má lokální extrémy – pokud ano, vypočtěte je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?
(v) Zjistěte, zda má daná funkce asymptoty, Pokud ano, vypočtěte je.
(vi) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f.

Příklad 3 (25 bodů)

Nalezněte maximum a minimum funkce tří proměnných f na množině $M \subset \mathbb{R}^3$. Pokud neexistuje $\max_M f$, určete $\sup_M f$. Pokud neexistuje $\min_M f$, určete $\inf_M$. Funkce f a množina M jsou dány takto:

$$f(x, y, z) = x^2y^2 + y^2z^2, \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x + y + z = 1,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}.$$

Příklad 4 (25 bodů)

Určete hodnost $h(A)$ matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & 9 & 4 & a \\ 1 & 15 & b & 24 \end{pmatrix}$$

v závislosti na reálných parametrech a, b.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2012/13

Studijní program: Matematika
Studijní obory: MA, MMIB, MMFT, MSTR, NVM, PMSE, MDU

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

Nejprve určíme, že $M = \{[x,y];\ x \in \langle 0,1\rangle,\ y \in \langle x^2, x\rangle\}$. Je snadno vidět, že integrál existuje. K výpočtu užijeme Fubiniovy věty.

$$\int_M (4y^3 - xy + 4x^3)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^x (4y^3 - xy + 4x^3)\,dy\right] dx.$$

Vypočteme nejprve vnitřní integrál

$$\int_{x^2}^x (4y^3 - xy + 4x^3)\,dy = -x^8 - \frac{7}{2}x^5 + 5x^4 - \frac{1}{2}x^3.$$

Výpočet integrálu této funkce od 0 do 1 vede snadno k výsledku. Je tedy

$$\int_M (4y^3 - xy + 4x^3)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(-x^8 - \frac{7}{2}x^5 + 5x^4 - \frac{1}{2}x^3\right) dx = \frac{13}{72}.$$

Příklad 2 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \sqrt{x^2 - \frac{1}{x}}$$

(i) Definičním oborem funkce je množina těch x, pro něž je výraz $x^2 - \frac{1}{x}$ větší nebo roven nule. Po jednoduchém výpočtu nám vyjde, že

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup \langle 1, \infty).$$

(ii) Z věty o spojitosti součtu dvou spojitých funkcí a ze spojitosti funkce $\sqrt{y}$ plyne spojitost funkce f v každém bodě definičního oboru $D(f)$.

(iii) Máme $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ a $f(1) = 0$.

(iv) Snadno vypočteme

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{-1/2}\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)$$

na $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

Výpočet znaménka derivace dává:

- $f'(x) < 0$, a tedy f je klesající, na intervalu $(-\infty, -1/\sqrt[3]{2})$;
- $f'(x) > 0$, a tedy f je rostoucí, na intervalu $(-1/\sqrt[3]{2}, 0)$;
- $f'(x) > 0$, a tedy f je rostoucí, na intervalu $(1, \infty)$.

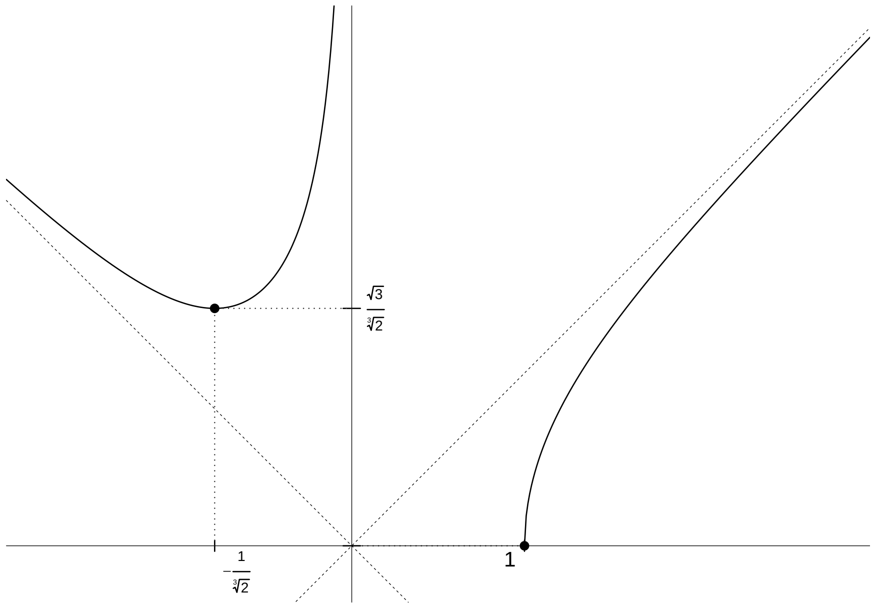
Protože f je v bodě 1 spojitá zprava a protože $\lim_{x\to 1+} f'(x) = \infty$, je $f'(1+) = \infty$: této informace můžeme využít k upřesnění náčrtku grafu.

Funkce f má v bodě $-1/\sqrt[3]{2}$ ostré lokální minimum rovné $\sqrt{3}/\sqrt[3]{2}$. Funkce f není na $D(f)$ omezená shora, nenabývá tedy na $D(f)$ maxima. Minima nabývá v bodě 1, a je $f(1) = 0$.

(v) Funkce f má v bodě ∞ asymptotu, právě když existují vlastní limity $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ a $\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = b$. Asymptotou pak nazveme afinní funkci $ax + b$. Analogické tvrzení platí v bodě $-\infty$.

Provedeme-li výše uvedené výpočty, snadno zjistíme, že asymptota v bodě $-\infty$ existuje a má tvar $v(x) = -x$. Asymptota v bodě ∞ rovněž existuje a je rovna $w(x) = x$.

(vi) Náčrtek grafu funkce f na základě uvedených výpočtů:



Příklad 3 (25 bodů)

Protože funkce f je spojitá na celém $\mathbb{R}^3$ (je dokonce třídy $C^\infty(\mathbb{R}^3)$) , můžeme využít toho, že $\sup_M f = \max_{\bar{M}} f$ a $\inf_M f = \min_{\bar{M}} f$. Pokud funkce f v některém z bodů M dosahuje hodnoty $\sup_M f$, má zde funkce f maximum, přičemž uvedený bod je bodem maxima.

Budeme tedy zkoumat funkci f na množině $\bar{M}$. Ta je uzavřená a omezená v $\mathbb{R}^3$ a funkce f je na ní spojitá. Nabývá tedy f na $\bar{M}$ svého maxima a minima. Podezřelými jsou jednak body v M nalezené metodou Lagrangeových multiplikátorů, dále pak body, které leží v $\bar{M}$ a pro něž je alespoň jedna ze souřadnic nulová. Zkoumejme nejprve funkci na množinách M_i, $i = 1, 2, 3$, kde

$$M_1 = \{[0, y, 1-y];\ y \in \langle 0,\ 1\rangle\}, \quad M_2 = \{[1-y, y, 0];\ y \in \langle 0,\ 1\rangle\}$$
$$\text{a } M_3 = \{[x, 0, 1-x];\ x \in \langle 0,\ 1\rangle\}.$$

Na M_3 je $f \equiv 0$. Protože funkce f je na $\bar{M}$ nezáporná, jsou všechny body této úsečky body minima f na $\bar{M}$. Na množinách M_1 a M_2 je funkce f rovna $y^2(1-y)^2$. Tato funkce jedné proměnné má na intervalu $\langle 0,\ 1\rangle$ „podezřelé“ body 0, 1/2 a 1, z nichž pouze bod 1/2 je relevantní. Na množinách M_1 a M_2 tak máme dva podezřelé body $[0, 1/2, 1/2]$ a $[1/2, 1/2, 0]$. V nich nabývá f hodnoty 1/16.

Zkoumejme nyní podezřelé body v M metodou Lagrangeových multiplikátorů. Předně je $\nabla(x+y+z-1) = [1,1,1]$, tento bod neleží v M. Lagrangeova funkce má tvar $L(x,y,z,\lambda) = x^2y^2+y^2z^2+\lambda(x+y+z-1)$. Pro nalezení multiplikátoru a souřadnic podezřelého bodu dostáváme soustavu rovnic

$$2xy^2+\lambda=0, \quad 2y(x^2+z^2)+\lambda=0, \quad 2zy^2+\lambda=0, \quad x+y+z=1.$$

Jejich vyřešením (nesmíme přitom zapomenout, že v M jsou všechny souřadnice kladné) dostaneme další podezřelý bod, a sice $[1/4,1/2,1/4]$. V něm je funkční hodnota rovna $1/32$. Můžeme tedy shrnout: f nabývá v $\bar{M}$ svého maxima $1/16$ v bodech $[0,1/2,1/2]$ a $[1/2,1/2,0]$ a svého minima 0 v bodech $[x,0,1-x]$, $x \in \langle 0,\, 1\rangle$. Protože žádný z těchto bodů neleží v M, nenabývá f na M svého maxima ani svého minima. Jest $\sup_M f = 1/16$, $\inf_M f = 0$.

Příklad 4 (25 bodů)

Použijeme vhodnou transformaci a dostaneme postupně matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 9 & -6 & a+2 \\ 0 & 15 & b-5 & 25 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a-13 \\ 0 & 0 & b+5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & b+5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-13 \end{pmatrix}.$$

Nyní je zřejmé, že $h(A) = 2$ v případě, že $a = 13$ a $b = -5$. Dále, je-li $a = 13$ a $b \neq -5$ nebo $a \neq 13$ a $b = -5$, je hodnost matice $h(A) = 3$. Jestliže $a \neq 13$ a $b \neq -5$, je $h(A) = 4$.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2012/13

Studijní program: Matematika
Studijní obory: MA, MMIB, MMFT, MSTR, NVM, PMSE, MDU

Varianta B

Příklad 1 (25 bodů)

Vypočtěte objem množiny M, kde M je určena následujícími nerovnostmi: $x^2+y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ a $z \leq xy$.

Příklad 2 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \sin x + \cos^2 x.$$

(i) Určete definiční obor funkce f a rozhodněte, zda je funkce sudá, lichá či periodická. (Zjištěnou skutečnost využijte při výpočtu.)
(ii) Zkoumejte spojitost funkce f.
(iii) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda funkce f má lokální extrémy – pokud ano, vypočtěte je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?
(iv) Zjistěte, zda má daná funkce asymptoty, Pokud ano, vypočtěte je.
(v) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f.

Příklad 3 (25 bodů)

Nalezněte maximum a minimum funkce dvou proměnných f na množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Pokud neexistuje $\max_M f$, určete $\sup_M f$. Pokud neexistuje $\min_M f$, určete $\inf_M$. Funkce f a množina M jsou dány takto:

$$f(x,y) = (1+x)y^3, \quad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1,\ x > 0,\ y > 0\ \}.$$

Příklad 4 (25 bodů)

Spočítejte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z & 0 \\ x & x-y & x+z & x \\ y+z & x+z & x+y & x+y+z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2012/13

Studijní program: Matematika
Studijní obory: MA, MMIB, MMFT, MSTR, NVM, PMSE, MDU

Varianta B — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

Nejprve určíme, že $M = \{[x,y,z]; x \in \langle 0,1\rangle, y \in \langle 0,\sqrt{1-x^2}\rangle, z \in \langle 0,xy\rangle\}$. K výpočtu objemu užijeme Fubiniovy věty.

$$\mu(M) = \int_M 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_0^{xy} dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(x - x^3)\,dx = \frac{1}{8}.$$

Příklad 2 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \sin x + \cos^2 x.$$

(i) Definičním oborem funkce je celé $\mathbb{R}$ a funkce f je na svém definičním oboru 2π-periodická. Stačí tedy zkoumat tuto funkci na intervalu délky 2π, například na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$.

(ii) Funkce f je spojitá v každém bodě svého definičního oboru. Je totiž součtem dvou spojitých funkcí.

(iii) Je předně $f(0) = f(2\pi) = 0$. Nulové body derivace

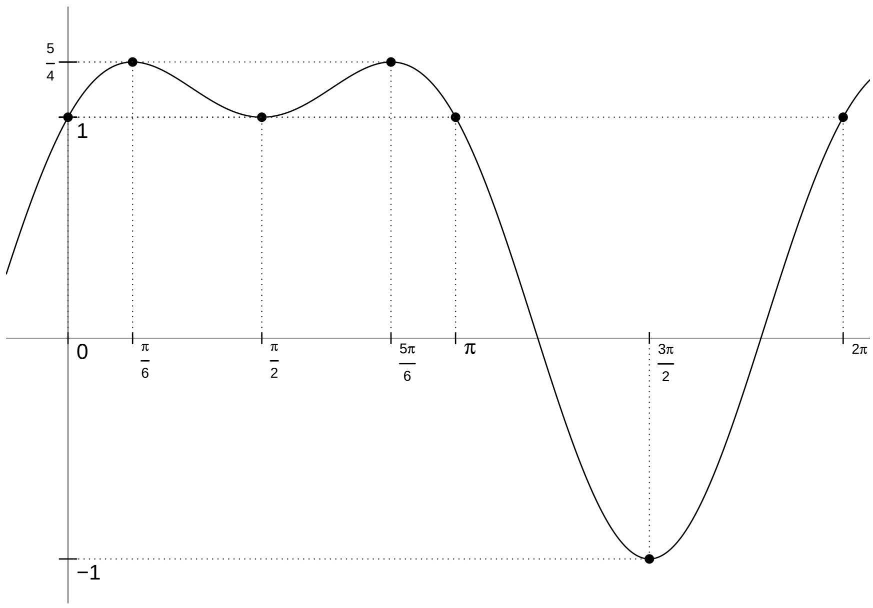
$$f'(x) = \cos x(1 - 2\sin x)$$

jsou právě ty body intervalu $(0, 2\pi)$, něž platí, že $\sin x = \frac{1}{2}$ nebo $\cos x = 0$. To jsou body $\pi/6$, $\pi/2$, $5\pi/6$, $3\pi/2$.

Z tvaru derivace je snadno vidět jakého znaménka nabývá v jednotlivých intervalech a jaká je tedy monotonie funkce f. Je tedy f rostoucí na intervalu $(0, \pi/6)$, klesající na $(\pi/6, \pi/2)$, rostoucí na $(\pi/2,\ 5\pi/6)$, klesající na intervalu $(5\pi/6, 3\pi/2)$ a rostoucí na $(3\pi/2, 2\pi)$. Odtud plyne, že f nabývá lokálních maxim v bodech $\pi/6$ a $5\pi/6$, lokálních minim pak v bodech $\pi/2$ a $3\pi/2$. Je $f(\pi/6) = f(5\pi/6) = 5/4$, $f(\pi/2) = 1$ a $f(3\pi/2) = -1$. Odtud snadno nahlédneme, že $\max_{\mathbb{R}} f = 5/4$ a $\min_{\mathbb{R}} f = -1$.

(iv) Funkce f nemá asymptotu v žádném nevlastním bodě.

(v) Náčrtek grafu funkce f na základě uvedených výpočtů:



Příklad 3 (25 bodů)

Množina $\bar{M}$ je omezená a uzavřená v $\mathbb{R}^2$. Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}^2$ a je tedy spojitá i na množině $\bar{M}$. Podle věty, která říká, že funkce spojitá na kompaktní množině nabývá na ní své největší a nejmenší hodnoty, má tedy funkce f na $\bar{M}$ maximum a minimum. Ze spojitosti f na $\bar{M}$ a z kompaktnosti této množiny plyne, že $\max_{\bar{M}} f = \sup_M f$ a $\min_{\bar{M}} f = \inf_M f$. Pokud se některá z hodnot $\inf_M f, \sup_M f$ nabývá v některém bodě množiny M, je jasné, že funkce má na M příslušný extrém.

Vyšetřeme tedy nejprve funkci f na kompaktu $\bar{M}$. Body maxima a minima mohou být buďto kritické body funkce f, které leží v M^0, anebo body hranice množiny M.

Z rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^3 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2(1+x) = 0$$

plyne, že $y = 0$, a tedy v M^0 neleží žádný kritický bod.

Hranice množiny M je sjednocením úseček

$$I_1 = \{[x,0];\ x \in \langle 0,\ 1\rangle\}, \quad I_2 = \{[0,y];\ y \in \langle 0,\ 1\rangle\}$$

a oblouku $I_3 = \{[x,y];\ x^2+y^2 = 1,\ x > 0,\ y > 0\}$. Body úsečky I_1 jsou body minima funkce f na $\bar{M}$. Protože na množině M je $f > 0$, je vidět, že $\inf_M f = 0$ a minima funkce f na M nenabývá. Na úsečce I_2 je funkce f rovna y^3. Protože tato funkce je na intervalu $\langle 0,\ 1\rangle$ rostoucí a nezáporná, je bod $[0,1]$ jedním z „podezřelých“ bodů, v nichž může f nabývat maxima na $\bar{M}$.

K hledání podezřelých bodů na I_3 můžeme užít metody Lagrangeových multiplikátorů. Derivováním Lagrangeovy funkce $L(x,y,\lambda) = (1+x)y^3 + \lambda(x^2+y^2-1)$ podle všech tří proměnných a položením těchto derivací rovných nule dostaneme tři rovnice

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) &= y^2 + 2\lambda x = 0\\
\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) &= 3(1+x)y^2 + 2\lambda y = 0\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) &= x^2+y^2-1 = 0.
\end{aligned}$$

Z těchto tří rovnic snadno vyloučíme dvě proměnné a dostaneme jednu rovnici $4x^2 + 3x - 1 = 0$. Z jejích dvou kořenů lze použít pouze ten kladný, který se rovná $1/4$. Další „podezřelý“ bod je tedy $[1/4, \sqrt{15}/4]$, s funkční hodnotou $75/256\sqrt{15}$. Srovnáním hodnot funkce f ve dvou „podezřelých“ bodech $[0, 1]$ a $[1/4, \sqrt{15}/4]$, zjistíme, že bodem maxima f na $\bar{M}$ je bod $[1/4, \sqrt{15}/4]$. Protože tento bod leží v M, je zároveň bodem maxima f na M.

Shrnutí: funkce f nabývá na množině M svého maxima a je $\max_M f = f(1/4, \sqrt{15}/4) = 75/256\sqrt{15}$. Minima funkce f na množině M nenabývá, je ale $\inf_M f = 0$.

Příklad 4 (25 bodů)

Přičteme-li první řádek ke třetímu, dostaneme

$$\begin{pmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z & x+y+z \end{pmatrix},$$

což je $(x + y + z)$-násobek 4. řádku. Matice je tudíž singulání a její determinant musí být 0.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2012/13

Studijní program: Fyzika
Studijní obor: UMF

Varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \sqrt{x^2 - \frac{1}{x}}.$$

(i) Určete definiční obor funkce f.
(ii) Zkoumejte spojitost funkce f.
(iii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce f.
(iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda funkce f má lokální extrémy – pokud ano, vypočtěte je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?
(v) Zjistěte, zda má daná funkce asymptoty, Pokud ano, vypočtěte je.
(vi) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f.

Příklad 2 (25 bodů)

Určete hodnost $h(A)$ matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & 9 & 4 & a \\ 1 & 15 & b & 24 \end{pmatrix}$$

v závislosti na reálných parametrech a, b.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2012/13

Studijní program: Fyzika
Studijní obor: UMF

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \sqrt{x^2 - \frac{1}{x}}$$

(i) Definičním oborem funkce je množina těch x, pro něž je výraz $x^2 - \frac{1}{x}$ větší nebo roven nule. Po jednoduchém výpočtu nám vyjde, že

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup \langle 1, \infty).$$

(ii) Z věty o spojitosti součtu dvou spojitých funkcí a ze spojitosti funkce $\sqrt{y}$ plyne spojitost funkce f v každém bodě definičního oboru $D(f)$.

(iii) Máme $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ a $f(1) = 0$.

(iv) Snadno vypočteme

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{-1/2}\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)$$

na $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

Výpočet znaménka derivace dává:

- $f'(x) < 0$, a tedy f je klesající, na intervalu $(-\infty, -1/\sqrt[3]{2})$;
- $f'(x) > 0$, a tedy f je rostoucí, na intervalu $(-1/\sqrt[3]{2}, 0)$;
- $f'(x) > 0$, a tedy f je rostoucí, na intervalu $(1, \infty)$.

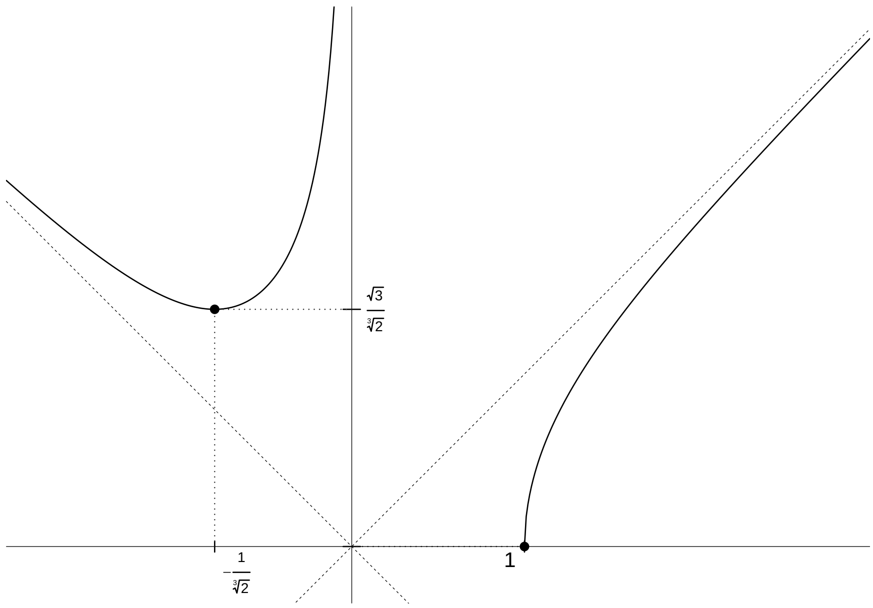
Protože f je v bodě 1 spojitá zprava a protože $\lim_{x\to 1+} f'(x) = \infty$, je $f'(1+) = \infty$: této informace můžeme využít k upřesnění náčrtku grafu.

Funkce f má v bodě $-1/\sqrt[3]{2}$ ostré lokální minimum rovné $\sqrt{3}/\sqrt[3]{2}$. Funkce f není na $D(f)$ omezená shora, nenabývá tedy na $D(f)$ maxima. Minima nabývá v bodě 1, a je $f(1) = 0$.

(v) Funkce f má v bodě ∞ asymptotu, právě když existují vlastní limity $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ a $\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = b$. Asymptotou pak nazveme afinní funkci $ax + b$. Analogické tvrzení platí v bodě $-\infty$.

Provedeme-li výše uvedené výpočty, snadno zjistíme, že asymptota v bodě $-\infty$ existuje a má tvar $v(x) = -x$. Asymptota v bodě ∞ rovněž existuje a je rovna $w(x) = x$.

(vi) Náčrtek grafu funkce f na základě uvedených výpočtů:



Příklad 2 (25 bodů)

Použijeme vhodnou transformaci a dostaneme postupně matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 9 & -6 & a+2 \\ 0 & 15 & b-5 & 25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a-13 \\ 0 & 0 & b+5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & b+5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-13 \end{pmatrix}.$$

Nyní je zřejmé, že $h(A) = 2$ v případě, že $a = 13$ a $b = -5$. Dále, je-li $a = 13$ a $b \neq -5$ nebo $a \neq 13$ a $b = -5$, je hodnost matice $h(A) = 3$. Jestliže $a \neq 13$ a $b \neq -5$, je $h(A) = 4$.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2012/13

Studijní program: Fyzika
Studijní obor: UMF

Varianta B

Příklad 1 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \sin x + \cos^2 x.$$

(i) Určete definiční obor funkce f a rozhodněte, zda je funkce sudá, lichá či periodická. (Zjištěnou skutečnost využijte při výpočtu.)
(ii) Zkoumejte spojitost funkce f.
(iii) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda funkce f má lokální extrémy – pokud ano, vypočtěte je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?
(iv) Zjistěte, zda má daná funkce asymptoty, Pokud ano, vypočtěte je.
(v) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f.

Příklad 2 (25 bodů)

Spočítejte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z & 0 \\ x & x-y & x+z & x \\ y+z & x+z & x+y & x+y+z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2012/13

Studijní program: Fyzika
Studijní obor: UMF

Varianta B — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \sin x + \cos^2 x.$$

(i) Definičním oborem funkce je celé $\mathbb{R}$ a funkce f je na svém definičním oboru 2π-periodická. Stačí tedy zkoumat tuto funkci na intervalu délky 2π, například na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

(ii) Funkce f je spojitá v každém bodě svého definičního oboru. Je totiž součtem dvou spojitých funkcí.

(iii) Je předně $f(0) = f(2\pi) = 0$. Nulové body derivace

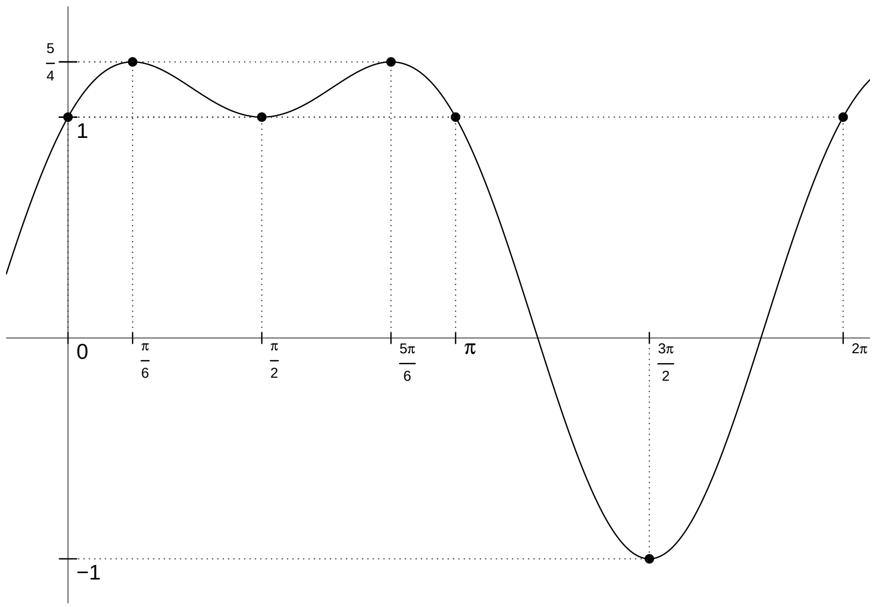
$$f'(x) = \cos x(1 - 2 \sin x)$$

jsou právě ty body intervalu $(0, 2\pi)$, něž platí, že $\sin x = \frac{1}{2}$ nebo $\cos x = 0$. To jsou body $\pi/6$, $\pi/2$, $5\pi/6$, $3\pi/2$.

Z tvaru derivace je snadno vidět jakého znaménka nabývá v jednotlivých intervalech a jaká je tedy monotonie funkce f. Je tedy f rostoucí na intervalu $(0, \pi/6)$, klesající na $(\pi/6, \pi/2)$, rostoucí na $(\pi/2,\ 5\pi/6)$, klesající na intervalu $(5\pi/6, 3\pi/2)$ a rostoucí na $(3\pi/2, 2\pi)$. Odtud plyne, že f nabývá lokálních maxim v bodech $\pi/6$ a $5\pi/6$, lokálních minim pak v bodech $\pi/2$ a $3\pi/2$. Je $f(\pi/6) = f(5\pi/6) = 5/4$, $f(\pi/2) = 1$ a $f(3\pi/2) = -1$. Odtud snadno nahlédneme, že $\max_{\mathbb{R}} f = 5/4$ a $\min_{\mathbb{R}} f = -1$.

(iv) Funkce f nemá asymptotu v žádném nevlastním bodě.

(v) Náčrtek grafu funkce f na základě uvedených výpočtů:



Příklad 2 (25 bodů)

Přičteme-li první řádek ke třetímu, dostaneme

$$\begin{pmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z & x+y+z \end{pmatrix},$$

což je $(x+y+z)$-násobek 4. řádku. Matice je tudíž singulání a její determinant musí být 0.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2012/13

Studijní program: Matematika, *Studijní obor:* MIU

Varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

Navrhněte deterministický konečný automat nad abecedou $\{0, 1\}$, který přijímá všechna slova délky alespoň 4 znaky, která obsahují alespoň jeden znak 1. Například slova 0010, 1111, 110011 automat přijme, zatímco slova 11, 101, 00000 nepřijme. Přechodovou funkci automatu zapište ve tvaru tabulky a automat znázorněte ve tvaru přechodového diagramu. Navrhněte co nejjednodušší automat, tzn. takový, který bude mít minimální počet stavů. Minimalitu počtu stavů vašeho automatu zdůvodněte.

Příklad 2 (25 bodů)

Je dán následující program (obě zadání v Pascalu a v jazyce C jsou ekvivalentní):

```
program A;
var N, X: integer;
begin
  read(N);
  X := 0;
  while N > 0 do
    begin
    X := X + 9 - N mod 10;
    N := N div 10
    end;
  write(X)
end.
```

```
main() /* A */
{
  int n, x;
  scanf( "%d", &n);
  x = 0;
  while (n > 0)
  {
    x = x + 9 - n % 10;
    n /= 10;
  }
  printf( "%d", x);
}
```

a) Jaký výsledek obdržíme při výpočtu se vstupní hodnotou `N=10593`?
b) Určete, pro kterou vstupní hodnotu `N` bude výsledkem číslo `X=24`. Nalezněte tři nejmenší různá taková `N` (pokud existují).
c) Určete všechny vstupní hodnoty `N`, pro která je výsledek výpočtu roven vstupní hodnotě, tzn. platí `X=N`.

Všechny své odpovědi zdůvodněte.

Příklad 3 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem
$$f(x) = \frac{\ln^3 x - 2}{\ln^2 x + 1}.$$

(i) Určete definiční obor funkce f.
(ii) Zkoumejte spojitost funkce f.
(iii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce f.
(iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda funkce f má lokální extrémy – pokud ano, vypočtěte je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?
(v) Zjistěte, zda má daná funkce asymptoty, Pokud ano, vypočtěte je.
(vi) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f.

Příklad 4 (25 bodů)

Vypočtěte determinant matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2012/13

Studijní program: Matematika
Studijní obor: MIU

Varianta A — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

Pomocí stavů automatu odpočítáváme počet znaků přijatých ze vstupu a současně evidujeme, zda už jsme přečetli ze vstupu alespoň jeden znak 1. Stavy B, C, D znamenají slova délky po řadě 1, 2, 3 (a více) tvořená samými znaky 0, stavy E, F, G označují slova délky 1, 2, 3 obsahující alespoň jeden znak 1. Žádný z těchto stavů není koncový. Automat má jediný koncový stav H, do něhož přejde ze stavu D přečtením znaku 1 nebo ze stavu G přečtením jednoho libovolného znaku. Ve stavu H pak setrvá, dokud nepřečte celý vstup. Minimalitu počtu stavů ověříme redukcí sestrojeného konečného automatu.

	0	1	
$\longrightarrow$ A	B	E	počáteční stav
B	C	F	slovo 0
C	D	G	slovo 00
D	D	H	slovo délky alespoň 3, tvořené pouze znaky 0
E	F	F	slovo 1
F	G	G	slovo délky 2, obsahuje znak 1
G	H	H	slovo délky 3, obsahuje znak 1
$\longleftarrow$ H	H	H	slovo délky alespoň 4, obsahuje znak 1

Příklad 2 (25 bodů)

Výsledná hodnota X vznikne ciferným součtem vstupního čísla N, přičemž ale je každá cifra nahrazena svým doplňkem do 9. V cyklu se z N odzadu postupně oddělují jednotlivé cifry, nahrazují se svými doplňky do 9 a jsou přičítány k výsledné hodnotě X.

a) Doplňky cifer čísla $N = 10593$ jsou po řadě 8, 9, 4, 0, 6, jejich součet je roven výsledné hodnotě **27**.

b) Výsledek 24 nelze složit ze dvou cifer, musíme proto hledat mezi trojcifernými vstupními čísly. Získáme ho součtem tří jednociferných sčítanců $8+8+8$ nebo $9+8+7$ nebo $9+9+6$, což odpovídá trojicím cifer vstupního čísla 1, 1, 1 resp. 0, 1, 2 resp. 0, 0, 3. Z trojice cifer 1, 1, 1 lze sestavit jediné číslo 111, z trojice cifer 0, 1, 2 sestavíme čtyři různá trojciferná čísla 102, 120, 201, 210 a konečně trojice cifer 0, 0, 3 tvoří opět jediné trojciferné číslo 300. Z uvedených šesti možností vybereme jako výsledek úlohy tři nejmenší čísla, tedy **102**, **111** a **120**.

c) Podmínky zadání splňuje pouze vstupní hodnota **0**, pro níž se výpočet v cyklu nevykoná a výsledek je tedy zjevně roven nule. Pro záporná vstupní čísla je výsledek také nulový, tzn. odlišný od vstupní hodnoty. Nevyhovuje ani žádné kladné vstupní číslo. Žádné jednociferné číslo se nerovná svému doplňku do 9. Součet dvou cifer je roven nejvýše 18 a pro dvojciferná čísla z rozmezí od 10 do 18 snadno výčtem ověříme, že žádné z nich nevyhovuje (tzn. výsledek výpočtu se nerovná vstupní hodnotě). Vyšší dvojciferná čísla již zkoumat nemusíme. Pro $k > 2$ žádné k-ciferné číslo nemůže mít ciferný součet s k ciframi (trojciferné číslo má ciferný součet roven nejvýše 27, čtyřciferné nejvýše 36, atd.).

Příklad 3 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \frac{\ln^3 x - 2}{\ln^2 x + 1}$$

(i) Protože jmenovatel funkce f je kladný pro všechny hodnoty x, je definičním oborem funkce definiční obor logaritmu, tj. $D(f) = (0, \infty)$.

(ii) Z vět o spojitosti podílu dvou spojitých funkcí plyne spojitost funkce f v každém bodě definičního oboru $D(f)$.

(iii) Stačí si uvědomit, že $\lim_{x\to 0+} \frac{\ln^3 x - 2}{\ln^2 x + 1} = \lim_{y\to -\infty} \frac{y^3-2}{y^2+1} = -\infty$ a $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^3 x-2}{\ln^2 x+1} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^3-2}{y^2+1} = \infty$.

(iv) Snadno vypočteme

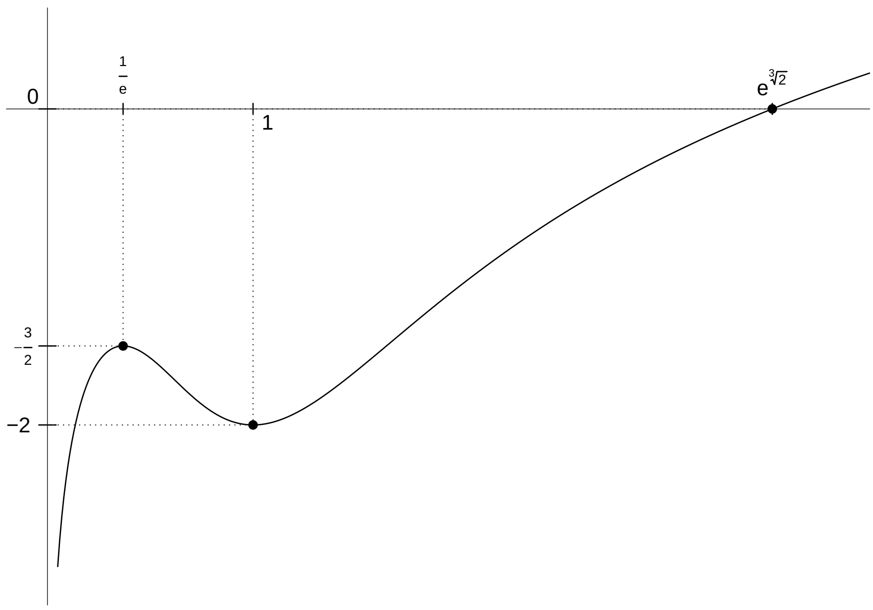
$$f'(x) = \frac{\ln x\ (\ln^3 x + 3\ln x + 4)}{x(\ln^2 x + 1)^2}$$

Výpočet nulových bodů derivace: Položíme $\ln x = u$ a vyřešíme rovnici $u \cdot (u^3 + 3u + 4) = 0$. Jejím reálným kořenům $u_0 = 0$ a $u_1 = -1$ odpovídají nulové body derivace $x_0 = 1$ a $x_1 = 1/e$. Ze znaménka derivace plyne, že f je rostoucí na $(0, 1/e)$, klesající na $(1/e, 1)$ a rostoucí na $(1, \infty)$. Má tedy lokální maximum v bodě $1/e$, lokální minimum v bodě 1. Protože není f na $D(f)$ omezená zdola ani shora, nenabývá na svém definičním oboru ani maxima ani minima. Pro upřesnění náčrtku grafu můžeme ještě spočítat: $f(1/e) = -3/2$, $f(1) = -2$, $f(e^{\sqrt[3]{2}}) = 0$.

(v) Funkce f má v bodě ∞ asymptotu, právě když existují vlastní limity $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ a $\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = b$. Asymptotou pak nazveme afinní funkci $ax + b$.

Provedeme-li výše uvedené výpočty, snadno zjistíme, že asymptota v bodě ∞ neexistuje.

(vi) Náčrtek grafu funkce f na základě uvedených výpočtů:



Příklad 4 (25 bodů)

Determinanty matice typu $n \times n$ kde $n \geq 4$ počítáme pomocí rozvoje podle libovolného řádku (sloupce). Je vhodné vybrat takový řádek či sloupec, který obsahuje co nejvíce nul.

Rozviňme determinant podle prvního sloupce:

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$+ 3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

K výpočtu každého determinantu 3×3 můžeme nyní použít Sarrusovo pravidlo. Dostaneme $\det A = 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 16 + 1 \cdot 4 = 48$.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2012/13

Studijní program: Matematika, *Studijní obor:* MIU

Varianta B

Příklad 1 (25 bodů)

Navrhněte deterministický konečný automat nad abecedou $\{0, 1\}$, který přijímá všechna slova délky nejvýše 4 znaky a dále přijímá také všechna slova delší, pokud obsahují alespoň jeden znak 1. Například slova 101, 0000, 001001 automat přijme, zatímco slova 00000, 000000000 nepřijme. Přechodovou funkci automatu zapište ve tvaru tabulky a automat znázorněte ve tvaru přechodového diagramu. Navrhněte co nejjednodušší automat, tzn. takový, který bude mít minimální počet stavů. Minimalitu počtu stavů vašeho automatu zdůvodněte.

Příklad 2 (25 bodů)

Je dán následující program (obě zadání v Pascalu a v jazyce C jsou ekvivalentní):

```pascal
program B;
var N, X: integer;
begin
  read(N);
  X := 0;
  while N > 0 do
    begin
    X := X * 10 + N mod 2;
    N := N div 2
    end;
  write(X)
end.
```

```c
main() /* B */
{
  int n, x;
  scanf( "%d", &n);
  x = 0;
  while (n > 0)
  {
    x = x * 10 + n % 2;
    n /= 2;
  }
  printf( "%d", x);
}
```

a) Jaký výsledek obdržíme při výpočtu se vstupní hodnotou `N=58`?
b) Určete, pro kterou vstupní hodnotu `N` bude výsledkem číslo `X=10011`. Nalezněte tři nejmenší různá taková `N` (pokud existují).
c) Určete všechny vstupní hodnoty `N` menší než 1000, pro které je výsledek výpočtu roven vstupní hodnotě, tzn. platí `X=N`.

Všechny své odpovědi zdůvodněte.

Příklad 3 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \sin x + \cos^2 x.$$

(i) Určete definiční obor funkce f a rozhodněte, zda je funkce sudá, lichá či periodická. (Zjištěnou skutečnost využijte při výpočtu.)
(ii) Zkoumejte spojitost funkce f.
(iii) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda funkce f má lokální extrémy – pokud ano, vypočtěte je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?
(iv) Zjistěte, zda má daná funkce asymptoty, Pokud ano, vypočtěte je.
(v) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f.

Příklad 4 (25 bodů)

Spočítejte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z & 0 \\ x & x-y & x+z & x \\ y+z & x+z & x+y & x+y+z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2012/13

Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	MIU

Varianta B — řešení

Příklad 1 (25 bodů)

Podle zadání automat nebude přijímat pouze ta slova, která jsou delší než čtyři a zároveň jsou tvořena pouze za znaků 0. Z počátečního stavu A proto přecházíme pod znakem 0 postupně do stavů B, C, D, E, F a tím odpočítáváme počet nul na vstupu. Všechny stavy A, B, C, D, E jsou koncové (nejvýše čtyři znaky 0), zatímco stav F již koncový není (pět a více znaků 0). Z kteréhokoliv stavu přejdeme pod znakem 1 do koncového stavu G (na vstupu se objevil alespoň jeden znak 1), v němž pak již setrváme. Minimalitu počtu stavů ověříme redukcí sestrojeného konečného automatu.

	0	1	
$\longleftrightarrow$ A	B	G	počáteční stav
$\longleftarrow$ B	C	G	pouze jeden znak 0
$\longleftarrow$ C	D	G	pouze dva znaky 0
$\longleftarrow$ D	E	G	pouze tři znaky 0
$\longleftarrow$ E	F	G	pouze čtyři znaky 0
F	F	G	pět a více znaků 0, žádný znak 1
$\longleftarrow$ G	G	G	alespoň jeden znak 1

Příklad 2 (25 bodů)

Výsledná hodnota X vznikne zrcadlovým převrácením dvojkového zápisu vstupního čísla N. V cyklu se z N odzadu postupně oddělují jednotlivé cifry jeho dvojkového zápisu a v obráceném pořadí se z nich vytváří výsledný desítkový zápis hodnoty X.

a) Číslo $N = 58$ má dvojkový zápis 111010, jeho převrácením dostaneme 010111 Vedoucí nula se v hodnotě nijak neprojeví, takže výsledkem je číslo **10111**.

b) Tři nejkratší způsoby zápisu čísla 10011 v desítkové soustavě jsou 10011, 010011 a 0010011. Hledáme tedy čísla, jejichž dvojkový zápis vypadá po převrácení právě takto, což jsou čísla **25** (má dvojkový zápis 11001), **50** (má dvojkový zápis 110010) a **100** (má dvojkový zápis 1100100).

c) Výsledek je vždy tvořen pouze ciframi 0 a 1, takže může být roven vstupní hodnotě jedině pro vstupní čísla, která jsou rovněž tvořena pouze nulami a jedničkami. Takových čísel z rozmezí od 0 do 999 je velmi málo – konkrétně to jsou pouze čísla 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110 a 111. Snadno ověříme, že z nich podmínkám úlohy vyhovují pouze čísla **0** a **1**. Pro všechny záporné vstupní hodnoty vychází výsledek 0, takže mezi nimi žádné další řešení také nenajdeme.

Příklad 3 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \sin x + \cos^2 x.$$

(i) Definičním oborem funkce je celé $\mathbb{R}$ a funkce f je na svém definičním oboru 2π-periodická. Stačí tedy zkoumat tuto funkci na intervalu délky 2π, například na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$.

(ii) Funkce f je spojitá v každém bodě svého definičního oboru. Je totiž součtem dvou spojitých funkcí.

(iii) Je předně $f(0) = f(2\pi) = 0$. Nulové body derivace

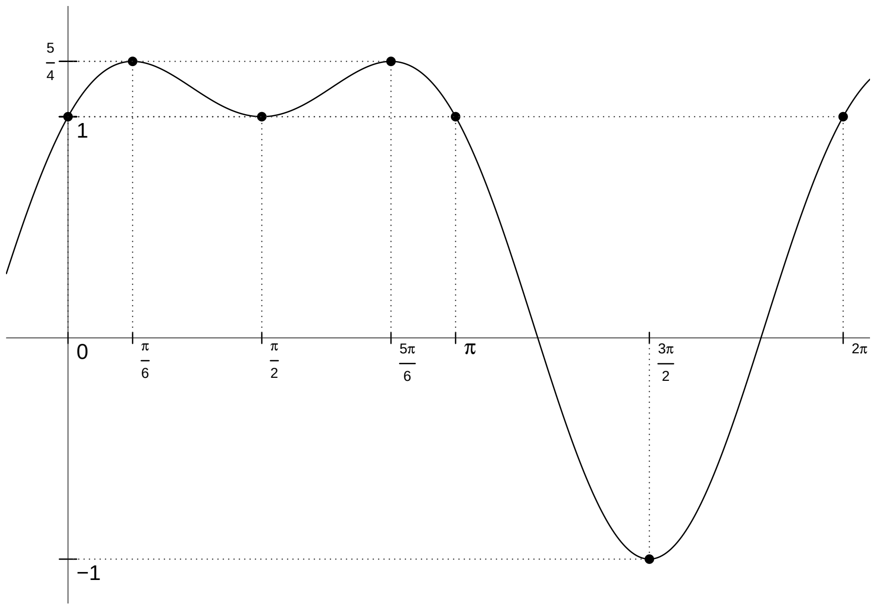
$$f'(x) = \cos x(1 - 2\sin x)$$

jsou právě ty body intervalu $(0, 2\pi)$, něž platí, že $\sin x = \frac{1}{2}$ nebo $\cos x = 0$. To jsou body $\pi/6$, $\pi/2$, $5\pi/6$, $3\pi/2$.

Z tvaru derivace je snadno vidět jakého znaménka nabývá v jednotlivých intervalech a jaká je tedy monotonie funkce f. Je tedy f rostoucí na intervalu $(0, \pi/6)$, klesající na $(\pi/6, \pi/2)$, rostoucí na $(\pi/2,\ 5\pi/6)$, klesající na intervalu $(5\pi/6, 3\pi/2)$ a rostoucí na $(3\pi/2, 2\pi)$. Odtud plyne, že f nabývá lokálních maxim v bodech $\pi/6$ a $5\pi/6$, lokálních minim pak v bodech $\pi/2$ a $3\pi/2$. Je $f(\pi/6) = f(5\pi/6) = 5/4$, $f(\pi/2) = 1$ a $f(3\pi/2) = -1$. Odtud snadno nahlédneme, že $\max_{\mathbb{R}} f = 5/4$ a $\min_{\mathbb{R}} f = -1$.

(iv) Funkce f nemá asymptotu v žádném nevlastním bodě.

(v) Náčrtek grafu funkce f na základě uvedených výpočtů:



Příklad 4 (25 bodů)

Přičteme-li první řádek ke třetímu, dostaneme

$$\begin{pmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z & x+y+z \end{pmatrix},$$

což je $(x + y + z)$-násobek 4. řádku. Matice je tudíž singulání a její determinant musí být 0.