

Studijní program Matematika  
Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2011/12

**Varianta A**

**Příklad 1** (25 bodů)

Vypočtěte

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin^2 x \, dx.$$

**Příklad 2** (25 bodů)

Funkce  $f$  je dána předpisem

$$f(x) = \frac{\cos x}{2 - \sin x}.$$

- (i) Určete definiční obor funkce  $f$ .
- (ii) Zkoumejte spojitost funkce  $f$ .
- (iii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce  $f$ .
- (iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda funkce  $f$  má lokální extrém — pokud ano, vypočtěte je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?
- (v) Zkoumejte konvexitu (konkávnost) funkce  $f$ .
- (vi) Vypočtěte asymptoty.
- (vii) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce  $f$ .

**Příklad 3** (25 bodů)

Zjistěte, zda funkce

$$f(x, y, z) = \operatorname{arctg} xyz$$

nabývá na množině

$$M = \{[x, y, z]; x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \geq 0, z \geq 0\}$$

největší (nejmenší) hodnoty. Pokud ano, vypočtěte je.

**Příklad 4** (25 bodů)

Zjistěte, pro která  $a, b \in \mathbb{Z}$  bude matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 - b & 3 \\ 1 & 2 + a & 4 & 6 \\ 2 & 4 & b - 6 & 7 \\ 1 & 2 - a & 2 - b & 1 \end{pmatrix}$$

regulární. Dále určete, pro která taková  $a, b \in \mathbb{Z}$  bude mít matice  $A^{-1}$  všechny prvky celočíselné.

Studijní program Matematika  
Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2011/12  
Varianta B

**Příklad 1** (25 bodů)

Vypočtěte

$$\int_2^3 \operatorname{arctg} \sqrt{x-2} \, dx.$$

**Příklad 2** (25 bodů)

Funkce  $f$  je dána předpisem

$$f(x) = e^x \left( \frac{1}{x} - 1 \right)$$

- (i) Určete definiční obor funkce  $f$ .
- (ii) Zkoumejte spojitost funkce  $f$ .
- (iii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce  $f$ .
- (iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda funkce  $f$  má lokální extrémy — pokud ano, vypočtěte je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?
- (v) Zkoumejte konvexitu (konkávnost) funkce  $f$ .
- (vi) Vypočtěte asymptoty.
- (vii) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce  $f$ .

**Příklad 3** (25 bodů)

Zjistěte, zda funkce

$$f(x, y, z) = xyz - z^2$$

nabývá na množině

$$M = \{[x, y, z]; x^2 + y^2 = 1, z \in \langle 0, 1 \rangle\}$$

největší (nejmenší) hodnoty. Pokud ano, vypočtěte je.

**Příklad 4** (25 bodů)

V závislosti na parametru  $x \in \mathbb{R}$  určete hodnotu a determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 1 \\ -1 & x-6 & 2 & -1 \\ -2 & x-8 & 8 & 0 \\ 0 & 1-x & x^2-x & 0 \end{pmatrix}.$$

Studijní program Matematika  
Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2011/12  
Varianta C

**Příklad 1** (25 bodů) Vypočtěte

$$\int_{-1}^1 \operatorname{arctg} \sqrt{x+1} \, dx.$$

**Příklad 2** (25 bodů)

Funkce  $f$  je dána předpisem

$$f(x) = (\log |x|)^3 - 3 \log |x|$$

(log znamená přirozený logaritmus).

- (i) Určete definiční obor funkce  $f$ .
- (ii) Zkoumejte spojitost funkce  $f$ .
- (iii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce  $f$ .
- (iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda funkce  $f$  má lokální extrém — pokud ano, vypočtěte je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?
- (v) Zkoumejte konvexitu (konkávnost) funkce  $f$ .
- (vi) Vypočtěte asymptoty.
- (vii) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce  $f$ .

**Příklad 3** (25 bodů)

Zjistěte, zda funkce

$$f(x, y, z) = x^2y - y^2z$$

nabývá na množině

$$M = \{[x, y, z]; x^2 + y^2 = 1, z \in \langle 0, 1 \rangle\}$$

největší (nejmenší) hodnoty. Pokud ano, vypočtěte je.

**Příklad 4** (25 bodů)

Uvažte reálný vektorový prostor  $\mathbb{R}^4$ . Zjistěte, pro jaké reálné hodnoty  $a, b$  bude vektor

$$(-1, a+1, -1, -b+a+2)$$

ležet v lineárním obalu vektorů

$$(1, 1, -a, a+1), (-1, 0, a-1, -a), (2, b+2, -1, 2a+b+2).$$