Studijní program Matematika
Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2011/12
Varianta A – Řešení

Příklad 1

Existence integrálu

$$\int_0^\pi x^2 \sin^2 x \; dx$$

je zřejmá, neboť integrand je spojitá funkce na $\mathbb{R}$. Integrál zapíšeme pomocí vzorce $\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2$ a spočteme nejprve příslušné primitivní funkce.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{2}\,dx &= \frac{x^3}{6} + c, \\ \int \frac{x^2}{2}\cos 2x\,dx &= \frac{1}{4}x^2\sin 2x - \int \frac{x}{2}\sin 2x\,dx = \frac{1}{4}x^2\sin 2x + \frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{4}\int \cos 2x\,dx = \\ &= \frac{1}{4}x^2\sin 2x + \frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x + c. \end{aligned}$$

V tomto výpočtu jsme užili dvakrát metodu integrace per partes.

Je tedy

$$\int x^2\sin^2 x\,dx = \int x^2\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x^3}{6} - \left(\frac{1}{4}x^2\sin 2x + \frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x\right) + c,$$

odkud dostaneme dosazením mezí

$$\int_0^\pi x^2\sin^2 x\,dx = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}.$$

Příklad 2

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \frac{\cos x}{2-\sin x}$$

(i) Funkce je definována na celém $\mathbb{R}$. Protože uvažovaná funkce je 2π - periodická, stačí vyšetřit její chování na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$.

(ii) Z věty o spojitosti podílu dvou spojitých funkcí plyne spojitost funkce f v každém bodě definičního oboru $\mathbb{R}$.

(iii) Protože funkce f je periodická, limity $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ a $\lim_{x\to\infty} f(x)$ neexistují.
Máme však $f(-\pi) = f(\pi) = -\frac{1}{2},\ f(\frac{-\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = 0,\ f(0) = \frac{1}{2}$.

(iv) Snadno vypočteme

$$f'(x) = \frac{1-2\sin x}{(2-\sin x)^2}.$$

Derivace je na zkoumaném intervalu nulová právě když $x = \pi/6$ a $x = 5\pi/6$. Z jejího znaménka zjistíme, že f je rostoucí na intervalu $\langle -\pi, \pi/6\rangle$, klesající na $\langle \pi/6, 5\pi/6\rangle$ a opět rostoucí na intervalu $\langle 5\pi/6, \pi\rangle$. Srovnáním funkčních hodnot v bodech $-\pi, \pi$ a v kritických bodech $\pi/6$ a $5\pi/6$ zjistíme, že na zkoumaném intervalu je

$$\max f = f(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \min f = f(5\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

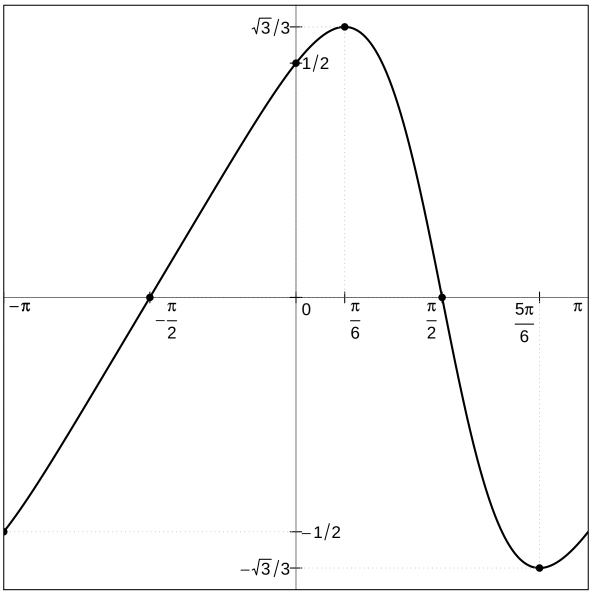
(v) Vypočteme druhou derivaci

$$f''(x) = -2\cos x\frac{1+\sin x}{(2-\sin x)^3}.$$

Z věty o vztahu znaménka druhé derivace a konvexnosti (konkávnosti) nyní snadno zjistíme, že f je konvexní na $(-\pi, -\pi/2)$, konkávní na $(-\pi/2, \pi/2)$ a konvexní na $(\pi/2, \pi)$.

(vi) Funkci f jsme zkoumali na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$. Na celém definičním oboru $\mathbb{R}$ dostaneme konečný výsledek 2π-periodickým prodloužením. Je zřejmé, že výsledná funkce nemá asymptotu v žádném z bodů $-\infty, \infty$.

(vii) Náčrtek grafu funkce f na základě provedených výpočtů:



Příklad 3

Funkce $f(x, y, z) = \operatorname{arctg} xyz$ má na $\mathbb{R}^3$ spojité parciální derivace všech řádů a množina M je omezená a uzavřená (tj., kompaktní v $\mathbb{R}^3$); nabývá tedy f na M svého maxima a minima. V bodech, pro něž $y = 0$ a $z = 0$ platí $f(x, 0, y) = f(x, y, 0) = 0$.

Zbývá tedy vyšetřit body, podezřelé z toho, že v nich funkce nabývá lokálního extrému vzhledem k množině $M_1 = \{[x, y, z];\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ y > 0,\ z > 0\}$. Získáme je metodou Lagrangeových multiplikátorů, kterou můžeme použít, neboť její podmínky jsou splněny.

Označme

$$L(x, y, z, \lambda) = \operatorname{arctg} xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2)$$

Hledáme nyní body $(x, y.z)$, které řeší rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{1}{1 + (xyz)^2} yz + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{1}{1 + (xyz)^2} xz + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= \frac{1}{1 + (xyz)^2} yx + 2\lambda z = 0 \end{aligned}$$

a zároveň leží v množině M_1.

Řešení této soustavy dává dva podezřelé body, ležící v množině M_1, a sice

$$[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}], \qquad [\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}].$$

Je nyní snadno vidět, že

$$f(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = \operatorname{arctg} \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

je maximem a

$$f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

je minimem funkce f na množině M.

Příklad 4

Počítejme

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 2 & 3-b & 3 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2+a & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 4 & b-6 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2-a & 2-b & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 2 & 3-b & 3 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 1+b & 3 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3b-12 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -a & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 2 & 3-b & 3 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 1+b & 3 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3b-12 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & b & 1 & -2 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 2 & 3-b & 3 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 1+b & 3 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2b-12 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & b & 1 & -2 & 1 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Determinant matice A je roven $a(2b-12)$. Matice je proto regulární právě když $a \neq 0$ a $b \neq 6$. Dále vidíme, že třetí řádek inverzní matice pro $a \neq 0, b \neq 6$ bude $\frac{1}{2b-12}(0,-1,1,-1)$. Pro žádné $b \in \mathbb{Z}$ nebude tento vektor celočíselný, a tedy matice A^{-1} nebude celočíselnou maticí pro žádnou volbu $a, b \in \mathbb{Z}$.

Studijní program Matematika
Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2011/12
Varianta B – Řešení

Příklad 1 Nejprve vypočteme primitivní funkci k arctg $\sqrt{x-2}$ na $(2,\infty)$. Jest

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x-2}\,dx = \int 1\cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x-2}\,dx = x\operatorname{arctg}\sqrt{x-2} - \int x\,\frac{1}{1+(x-2)}\,\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\,dx.$$

Poslední primitivní funkci spočteme substitucí; položíme $t=\sqrt{x-2}$. Odtud vypočteme $x=2+t^2,\ dx=2t\,dt$ a dostáváme

$$\int x\,\frac{1}{1+(x-2)}\,\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\,dx = \int \frac{2+t^2}{1+t^2}\,dt =$$
$$= \int \left[1+\frac{1}{1+t^2}\right]\,dt = t+\operatorname{arctg} t + c = \sqrt{x-2}+\operatorname{arctg}\sqrt{x-2}+c.$$

Nyní již snadno dopočteme:

$$\int_2^3 \operatorname{arctg}\sqrt{x-2}\,dx = (x-1)\operatorname{arctg}\sqrt{x-2}-\sqrt{x-2}\,|_2^3 = \frac{\pi}{2}-1.$$

Příklad 2

Funkce f je dána předpisem

$$f(x)=e^x\,(\frac{1}{x}-1)$$

(i) Funkce není definována pouze v bodě $x=0$. Je tedy definiční obor

$$D_f=(-\infty,0)\cup(0,\infty).$$

(ii) Z věty o aritmetice limit plyne spojitost funkce f v každém bodě definičního oboru D_f.

(iii)
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0,\ \lim_{x\to 0-} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to 0+} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty.$$

Odtud je vidět, že f nenabývá na D_f největší ani nejmenší hodnoty.

(iv) Snadno vypočteme

$$f'(x)=-\frac{e^x}{x^2}\,(x^2-x+1)$$

na D_f. Je tedy f' záporná ve všech bodech D_f, odkud plyne, že f je klesající na $(-\infty,0)$ a klesající na $(0,\infty)$ a že nemá v žádném bodě D_f lokální extrém.

(v) Vypočteme druhou derivaci

$$f''(x)=-\frac{e^x}{x^3}\,(x^3-x^2+2x-2)=-\frac{e^x}{x^3}\,(x-1)\,(x^2+2).$$

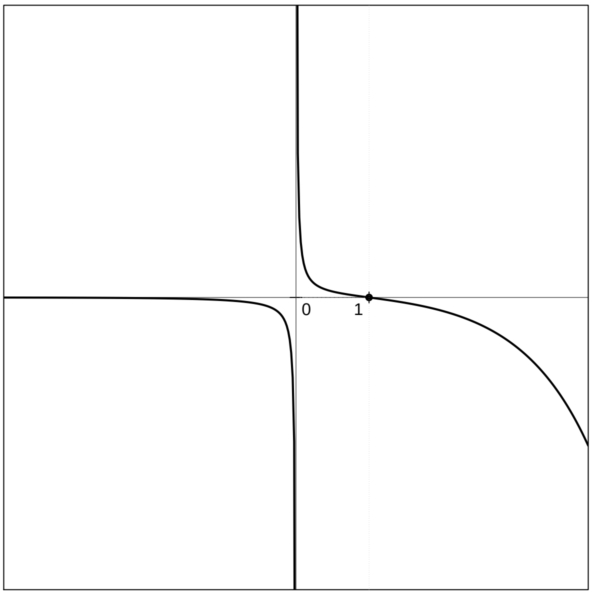
Z věty o vztahu znaménka druhé derivace a konvexnosti (konkávnosti) nyní snadno zjistíme, že f je konkávní na $(-\infty,0)$, konvexní na $(0,1)$ a konkávní na $(1,\infty)$. V inflexním bodě $x=1$ je $f(1)=0,\ f'(1)=-e$.

(vi) Funkce g má v bodě ∞ asymptotu, právě když existují vlastní limity

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=a,\ \lim_{x\to\infty}(g(x)-ax)=b.$$

Asymptotou pak nazveme afinní funkci $y=ax+b$. Analogické tvrzení platí v bodě $-\infty$.
Provedeme-li výše uvedené výpočty, snadno zjistíme, že naše funkce má asymptotu $y=0$ v bodě $-\infty$ a nemá asymptotu v bodě ∞.

(vii) Náčrtek grafu funkce f na základě provedených výpočtů:



Příklad 3

Funkce $f(x,y,z) = xyz - z^2$ má na $\mathbb{R}^3$ spojité parciální derivace všech řádů a množina M je omezená a uzavřená (tj., kompaktní v $\mathbb{R}^2$); nabývá tedy f na M svého maxima a minima.

Body podezřelé z extrému f na M jsou jednak body z M, pro něž je $z = 0$ nebo $z = 1$.

Pro $z = 0$ máme $f(x,y,0) = 0$. Případ $z = 1$ dává $f(x,y,1) = xy - 1$ s vazební množinou $M = \{[x,y]; x^2+y^2 = 1\}$. Protože jsou splněny předpoklady věty o Lagrangeových multiplikátorech, můžeme tuto metodu použít. Dostáváme rovnice

$$y + 2\lambda x = 0, \quad x + 2\lambda y = 0,$$

což (s užitím vazební podmínky) dává 4 podezřelé body, a sice

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right], \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right], \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right], \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right].$$

Pro $z \in (0,1)$ užijeme opět metodu Lagrangeových multiplikátorů. Ta vede nyní k rovnicím

$$yz + 2\lambda x = 0, \quad xz + 2\lambda y = 0, \quad xy - 2z = 0.$$

Jejich řešení, která splňují navíc vazební podmínky, jsou

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\right], \quad \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\right].$$

Srovnáním hodnot v kritických bodech dostáváme, že maxima na M nabývá funkce f v bodech $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\right]$, $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\right]$. Jeho hodnota je rovna $\frac{1}{16}$.

Minima na M nabývá funkce f v bodech $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$. Jeho hodnota je rovna $-\frac{3}{2}$.

Příklad 4

Po úpravě

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 1 \\ -1 & x-6 & 2 & -1 \\ -2 & x-8 & 8 & 0 \\ 0 & 1-x & x^2-x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & x+2 & 4 & 2 \\ 0 & 1-x & x^2-x & 0 \end{bmatrix}$$

vidíme, že hodnost matice A je o jedničku větší, než hodnost matice B,

$$B = \begin{pmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ x+2 & 4 & 2 \\ 1-x & x^2-x & 0 \end{pmatrix}.$$

Dále matice A i B mají stejné determinanty, konkrétně $2(x-1)(x-x^2)$. Pokud $x \neq 0,\ 1$, je hodnost matice A jistě 4. Pokud $x = 1$, je hodnost matice A rovna dvěma, pro $x = 0$ je hodnost matice A rovna 3.

Studijní program Matematika

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2011/12

Varianta C – Řešení

Příklad 1

Nejprve vypočteme primitivní funkci k arctg $\sqrt{x+1}$ na $(-1,\infty)$. Jest

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x+1}\,dx = \int 1\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}\,dx = x\operatorname{arctg}\sqrt{x+1} - \int x\,\frac{1}{x+2}\,\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx.$$

Posledni primitivni funkci spočteme substitucí; položíme $t=\sqrt{x+1}$. Odtud vypočteme $x=t^2-1,\ dx=2t\,dt$ a dostáváme

$$\int x\,\frac{1}{2+x}\,\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{t^2-1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \left[1-\frac{2}{1+t^2}\right]\,dt = t - 2\operatorname{arctg} t + c = \sqrt{x+1} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1} + c.$$

Nyní již snadno dopočteme:

$$\int_{-1}^{1} \operatorname{arctg}\sqrt{x+1}\,dx = (x+2)\operatorname{arctg}\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1}\ |_{-1}^{1} = \operatorname{arctg}\sqrt{2} - \sqrt{2}$$

Příklad 2

Funkce f je dána předpisem $f(x) = (\log|x|)^3 - 3\log|x|$

(i) Funkce není definována pouze v bodě $x=0$. Je tedy definiční obor

$$D_f = (-\infty,0)\cup(0,\infty).$$

Funkce je sudá a proto stačí vyšetřit její chování na intervalu $(0,\infty)$.

(ii) Z věty o spojitosti logaritmu na jeho definičním oboru plyne spojitost funkce f v každém bodě definičního oboru D_f.

(iii) $\lim_{x\to 0+} = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$

(iv) Snadno vypočteme

$$f'(x) = \frac{3}{x}(\log^2 x - 1)$$

Výpočet znaménka derivace dává: $f'>0$ — a tedy f je rostoucí — na intervalu $(0,1/e)$, $f'<0$ — a tedy f je klesající — na intervalu $(1/e,e)$, a konečně $f'>0$ — a tedy f je rostoucí — na intervalu (e,∞). Funkce f má v bodě $1/e$ (ostré) lokální maximum $f(1/e)=2$, ostré lokální minimum $f(e)=-2$. Protože f není na D_f omezená zdola ani shora, nenabývá f na D_f minima ani maxima.

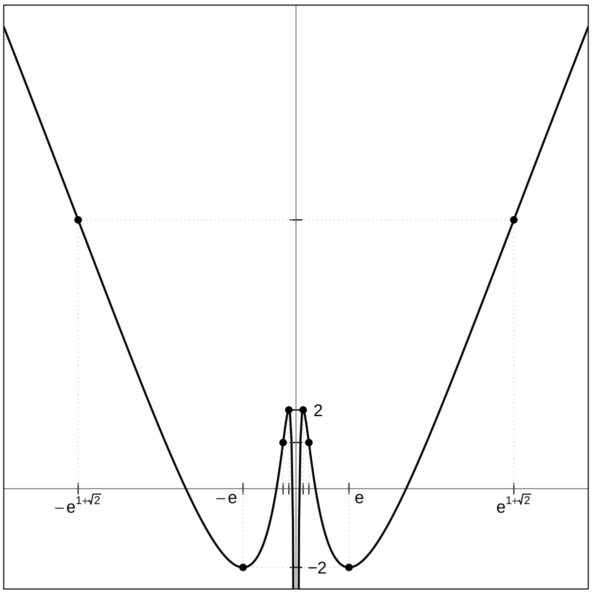
(v) Vypočteme druhou derivaci

$$f''(x) = -\frac{3}{x^2}(\log^2 x - 2\log x - 1)$$

Z věty o vztahu znaménka druhé derivace a konvexnosti (konkávnosti) nyní snadno zjistíme, že f je konkávní na $(0,\exp(1-\sqrt{2}))$, konvexní na $(\exp(1-\sqrt{2}),\exp(1+\sqrt{2}))$ a opět konkávní na $(\exp(1+\sqrt{2}),\infty)$.

(vi) Funkce g má v bodě ∞ asymptotu, právě když existují vlastní limity $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x} = a$ a $\lim_{x\to\infty}(g(x)-ax) = b$. Asymptotou pak nazveme afinní funkci $y(x)=ax+b$. Analogické tvrzení platí v bodě $-\infty$. Provedeme-li výše uvedené výpočty, snadno zjistíme, že naše funkce nemá v nevlastním bodě ∞ asymptotu.

(vii) Náčrtek grafu funkce f na základě provedených výpočtů:



Příklad 3

Funkce $f(x, y) = x^2y+y^2z$ má na $\mathbb{R}^3$ spojité parciální derivace všech řádů a množina M je omezená a uzavřená (tj., kompaktní v $\mathbb{R}^3$); nabývá tedy f na M svého maxima a minima.

Body podezřelé z extrému f na M budeme hledat jednak mezi takovými body množiny M, pro něž je $z = 0$ resp. $z = 1$, jednak mezi body množiny M, pro něž je $z \in (0, 1)$.

Předně je $f(x, y, 0) = x^2y$. Dosazením vazební podmínky dostaneme funkci $f^*(y) = (1 - y^2)y$, kterou budeme zkoumat na intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Jest $f^*(-1) = f^*(1) = 0$. V $(-1, 1)$ je $(f^*)' = 1 - 3y^2$. Snadno zjistíme, že její nulové body jsou $\frac{1}{\sqrt{3}}$ a $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Máme tedy pro $z = 0$ podezřelé body

$$[0, 1, 0],\ [0, -1, 0],\ [\sqrt{\frac{2}{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}, 0],\ [-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0],\ [\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0],\ [-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0].$$

Dále platí $f(x, y, 1) = x^2y-y^2$, Dosazením vazební podmínky dostaneme funkci $f^{**}(y) = (1-y^2)y-y^2$, kterou budeme opět zkoumat na intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Jest $f^{**}(-1) = f^{**}(1) = -1$. V $(-1, 1)$ je $(f^{**})' = -3y^2 - 2y + 1$. Snadno zjistíme, že její nulový bod je $\frac{1}{3}$. Máme tedy pro $z = 1$ podezřelé body

$$[0, 1, 1], \quad [0, -1, 1], \quad [\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}, 1], \quad [-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}, 1].$$

Zkoumejme nyní případ, kdy $z \in (0, 1)$. Metoda Lagrangeových multiplikátorů vede k rovnicím

$$2xy + 2\lambda x = 0, \quad x^2 - 2yz + 2\lambda y = 0, \quad -y^2 = 0.$$

Každé řešení této soustavy má souřadnice $y = 0$ a $x = 0$, není tedy prvkem množiny M. Případ $z \in (0, 1)$ tedy žádné další podezřelé body nepřidá.

Srovnáním hodnot funkce f v podezřelých bodech dostáváme

$$\max_M f = f(\sqrt{\frac{2}{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}, 0) = f(-\sqrt{\frac{2}{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}, 0) = \frac{2}{3\sqrt{3}},$$
$$\min_M f = f(0, 1, 1) = f(0, -1, 1) = -1.$$

Příklad 4

Máme zjistit pro která $a, b \in \mathbb{R}$ existují $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$\alpha(1, 1, -a, a + 1) + \beta(-1, 0, a - 1, -a) + \gamma(2, b + 2, -1, 2a + 2) = (-1, a + 1, -1, -b + a + 2).$$

neboli pro která a, b je řešitelná soustava, jejíž rozšířená matice má tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & b+2 & a+1 \\ -a & a-1 & -1 & -1 \\ a+1 & -a & 2a+b+2 & -b+a+2 \end{array}\right).$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & b+2 & a+1 \\ -a & a-1 & -1 & -1 \\ a+1 & -a & 2a+b+2 & -b+a+2 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & b & a+2 \\ -0 & -1 & 2a-1 & -a-1 \\ 0 & 1 & b & -b+2a+3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & b & a+2 \\ -0 & 0 & 2a-1+b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -b+a+1 \end{array}\right).$$

Soustava je proto řešitelná právě když $-b+a+1=0$ a $2a-1+b \neq 0$, tj., $b=a+1$ a $a \neq 0$.