

Matematika I

Jiří Felcman

Univerzita Jana Evangelisty Purkyně
v Ústí nad Labem



Přírodovědecká fakulta

KNM PRESS • PRAHA

2010

PŘEDMLUVA

1. přednáška (RNDr. Jiří Škvor, Ph.D.)

1. felcman@karlin.mff.cuni.cz
 - http://www.karlin.mff.cuni.cz/~felcman/Matematika_I.pdf
 - Tel. 47528 3246
 - KI č. dv. 541
2. Matematika I - anotace (116 stud.)
 - Studijní program B1802 - Aplikovaná informatika
 - Studijní obor 1802R006 Informační systémy
 - KI/MAT1 ZS 2/2 Z/Zk
3. Požadavky ke zkoušce
 - sylabus
 - státnice (prospěl s vyznamenáním)
4. Tituly
 - Ph.D.
 - RNDr.
 - Mgr.
 - Bc
5. Studium v zahraničí - ERASMUS
6. Ceny udělované studentům (Cena rektora)
7. SVOČ
8. Hodnocení učitelů - srozumitelnost
9. Zkouška
 - část písemná
 - část ústní

Praha, 26. září 2010

J. F.

OBSAH

Úvod	1
1 Matematická logika	2
1.1 Matematická logika	2
1.2 Logická výstavba matematiky	2
2 Vektorové prostory	3
2.1 Vektorový prostor	3
2.2 Podprostor vektorového prostoru	4
2.3 Lineární nezávislost	5
2.4 Báze a dimenze vektorového prostoru	9
2.5 Lineární zobrazení	11
2.6 Skalární součin a norma	13
2.6.1 Skalární součin	13
3 Matice	15
3.1 Operace s maticemi	15
3.1.1 Speciální matice	16
3.2 Hodnost matice	17
3.2.1 Určení hodnosti matice	17
3.3 Násobení matic	18
3.3.1 Vlastnosti násobení matic	18
Bibliografie	19

ÚVOD

Předpokládané znalosti ze středoškolské matematiky:

výroky, konjunkce, disjunkce, negace výroků, implikace, ekvivalence, kvantifikátory;

množiny a jejich rovnost, sjednocení, průnik a rovnost dvou množin, kartézský součin;

pojem funkce, definiční obor, obor hodnot, graf funkce, funkce sudá, lichá, periodická, monotonní, inverzní; elementární funkce (lineární, mocninné, lineární lomené, goniometrické, exponenciální a logaritmické), jejich definiční obory, vlastnosti a grafy;

úpravy algebraických výrazů;

řešení rovnic a nerovnic lineárních, kvadratických, goniometrických, exponenciálních a logaritmických;

komplexní čísla a počítání s nimi, n -tá odmocnina z komplexního čísla;

analytická geometrie - kartézské souřadnice bodu a vektoru v rovině a v prostoru, rovnice přímky v rovině a roviny v prostoru, vektorové a parametrické rovnice přímky a roviny, rovnice kružnice, elipsy, hyperboly a paraboly v rovině, skalární a vektorový součin vektorů, kolmost vektorů.

Předpokládané znalosti z Matematiky I pro navazující přednášku

Numerická matematika: Rolleova věta, definice normy funkce, definice seminormy, vlastní čísla, Geršgorinovy kruhy, ostře diagonálně dominantní matice, ortogonální polynomy, ...

Literatura k přednášce: (Klíč, 1998) (Turzík, 1998) (Krylová and Štědrý, 2004) (Štědrý, 2004) (Veselý, 2004) (Marcus, 1976) (Štěpánek, 1979a) (Štěpánek, 1979b) (Polák, 1991)

MATEMATICKÁ LOGIKA

Matematika

- * čistá
- * aplikovaná
- * ...

1.1 Matematická logika

- nástroj pro přesné vyjadřování matematických faktů (Klíč, 1998, strana 9)
- jazyk matematiky

Výrok

Historie

1.2 Logická výstavba matematiky

Definice

Věta

Lemma (stř. rod, 2. pád lemmatu)

Důkaz

Axiom

VEKTOROVÉ PROSTORY

Množina

Prostor

Algebra

Příklad 2.1 Množina reálných čísel $\mathbb{R} + \cdot$ vzdálenost**Cvičení 2.2** $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, sčítání vektorů, násobení vektoru reálným číslem**2.1 Vektorový prostor****Definice 2.3** (9 axiomů vektorového prostoru V , skaláry α, β , vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, nulový vektor $\mathbf{o}$)Řekneme, že množina V je vektorový prostor, jestliže je definováno sčítání $+$ prvků V a násobení reálným číslem $\cdot$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V &\longmapsto \mathbf{u} + \mathbf{v} \in V, \\ \mathbf{u} \in V, \alpha \in \mathbb{R} &\longmapsto \alpha \mathbf{u} \in V\end{aligned}$$

tak, že jsou splněny následující axiomy

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1. \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V & (\text{komutativita}) \\ 2. (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V & (\text{asociativita}) \\ 3. \exists \mathbf{o} \in V :: \mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in V & (\text{nulový vektor}) \\ 4. \forall \mathbf{u} \in V \exists -\mathbf{u} \in V :: \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o} & (\text{opačný vektor}) \\ 5. \mathbf{0} \mathbf{u} = \mathbf{o} \quad \forall \mathbf{u} \in V & \\ 6. 1 \mathbf{u} = \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in V & \\ 7. (\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u}) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in V & \\ 8. (\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in V & (\text{distributivita}) \\ 9. \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V & (\text{distributivita}) \end{array} \right.$$

Poznámka 2.4 vynechávání tečky**Poznámka 2.5** V literatuře se pro **vektorový prostor** používá také název *lineární vektorový prostor*, *lineární prostor* nebo pouze krátce *prostor*. Prvky vektorového prostoru nazýváme *vektory*.

Poznámka 2.6 Axiom číslo 5 lze vynechat, je totiž důsledkem ostatních axiomů:

Věta 2.7 *Nechť V je množina, na níž jsou definovány operace $+$ a $\cdot$ z Definice 2.3 a nechť platí axiomy 1. - 4. a 6. - 9. z Definice 2.3. Potom $\forall \mathbf{u} \in V$*

$$0 \mathbf{u} = \mathbf{o}.$$

Důkaz $\mathbf{u} + 0 \mathbf{u} = \dots$ □

Dále platí

Věta 2.8 *Nechť V spolu s operacemi $+$ a $\cdot$ je vektorový prostor a nechť $\mathbf{u} \in V$. Potom*

$$(-1) \mathbf{u} = -\mathbf{u}$$

Důkaz $\mathbf{u} + (-1) \mathbf{u} = \dots$ □

Poznámka 2.9 Vektorový prostor lze definovat pomocí sedmi axiomů. Axiomy 4 a 5 se vynechají a Axiom 3 se nahradí Axiomem 3* $\exists \mathbf{o} :: 0 \mathbf{u} = \mathbf{o} \forall \mathbf{u} \in V$.

Cvičení 2.10 $\mathbb{R}^n$ - množina uspořádaných n -tic, sčítání 'po složkách', násobení reálným číslem 'po složkách'

Cvičení 2.11 $C(I) = \{f; f \text{ je spojitá na intervalu } I\}$

Cvičení 2.12 $C^k(I)$ - množina funkcí, které mají spojitě derivace v I až do řádu k

Cvičení 2.13 Π_n - množina polynomů stupně $\leq n, n \in \mathbb{N}_0$, kde $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ a $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ je množina přirozených čísel

Cvičení 2.14 Množina normovaných polynomů $\tilde{\Pi}_n = \{p \in \Pi_n; p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0\}$

2. přednáška

2.2 Podprostor vektorového prostoru

Definice 2.15 (Podprostor W vektorového prostoru V)

Nechť V je vektorový prostor. $\emptyset \neq W \subset V$ nazýváme podprostorem V , jestliže $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ a $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (i) \quad & \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W \\ (ii) \quad & \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{u} \in W \Rightarrow \alpha \mathbf{u} \in W \end{aligned}$$

Věta 2.16 *Každý podprostor W vektorového prostoru V je vektorový prostor.*

Důkaz Ověříme splnění axiomů vektorového prostoru

1. zřejmé
2. zřejmé
3. $\mathbf{u} \in W, W \ni 0 \mathbf{u} = \mathbf{o} \in V$

4. $\mathbf{u} \in W, \exists -\mathbf{u} \in V, -\mathbf{u} = \underbrace{(-1)\mathbf{u}}$
5. zřejmé
6. zřejmé
7. zřejmé
8. zřejmé

□

Příklad 2.17 $\Pi_n[a, b]$ je podprostor $C[a, b]$ (polynomy st. $\leq n$ a spojité funkce definované na intervalu $[a, b]$)

Příklad 2.18 $\tilde{\mathbb{R}}^3 = \{(x_1, x_2, 0); x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, sčítání a násobení ‘po složkách’, je podprostor $\mathbb{R}^n$.

Cvičení 2.19 Necht $\hat{\mathbb{R}}^3 = \{(x_1, x_2, 1); x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Lze definovat operace $+$ a $\cdot$ tak, aby množina $\hat{\mathbb{R}}^3$ byla vektorovým prostorem?

2.3 Lineární nezávislost

Vyjádření nějakého vektoru jako l.k. jiných $\begin{cases} \text{LZE?} \\ \text{NELZE?} \end{cases}$

Definice 2.20 ((triviální, netriviální) lineární kombinace vektorů)

Necht V je vektorový prostor, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.
Vektor

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{u}_i = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{u}_k$$

nazveme lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$.

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ triviální lineární kombinace
 $\exists j \in \{1, \dots, k\} :: \alpha_j \neq 0$ netriviální l.k. ($\sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2 > 0$)

Příklad 2.21 $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$, $\sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$ (posun indexů)

Definice 2.22 ((LZ) lineárně závislé vektory)

Necht V je vektorový prostor, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$. Řekneme, že vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně závislé (LZ), jestliže existuje netriviální lineární kombinace $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$, která je rovna nulovému vektoru)

Definice 2.23 ((LN) lineárně nezávislé vektory)

Necht V je vektorový prostor, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$. Řekneme, že vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně nezávislé (LN), jestliže nejsou lineárně závislé.

Poznámka 2.24 $\text{LN} \Leftrightarrow (\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{u}_i = \mathbf{o} \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, k\})$

tj. LN $\Leftrightarrow$ pouze triviální lineární kombinace $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ je rovna nulovému vektoru.

Věta 2.25 $\text{LZ} \Leftrightarrow$ alespoň jeden je l.k. ostatních.

Důkaz $\Rightarrow$

$\Leftarrow$

□

Příklad 2.26 $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, $u = (1, 2, 3)$ jsou LZ

Příklad 2.27 $1, x, x^2, 3x^2 - x + 1$ jsou LZ

Příklad 2.28 $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ jsou LN. Odpověď na otázku, zda existuje netriviální lineární kombinace rovná nulovému vektoru, je záporná. Napišme lineární kombinaci vektorů a položme ji rovnu nulovému vektoru:

$$o = \sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i = \begin{cases} \alpha_1(1, 0, 0) \\ + \alpha_2(0, 1, 0) \\ + \alpha_3(0, 0, 1) \\ = (0, 0, 0) \end{cases}$$

Rozepsáno po složkách dostaneme

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Všimněte si, že $\alpha_1, \dots, \alpha_3$ jsou řešením úlohy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 2.29 $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (0, 2, 3)$, $u_3 = (0, 0, 3)$ jsou LN. Obdobně jako v předchozím příkladu napišme lineární kombinaci vektorů u_i a položme ji rovnu nulovému vektoru:

$$o = \sum_{i=1}^3 \alpha_i u_i = \begin{cases} \alpha_1(1, 2, 3) \\ + \alpha_2(0, 2, 3) \\ + \alpha_3(0, 0, 3) \\ = (0, 0, 0) \end{cases}$$

Rozepsáno po složkách dostaneme

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Všimněte si, že $\alpha_1, \dots, \alpha_3$ jsou řešením úlohy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 2.30 Funkce $1, x, x^2$ jsou LN (Důkaz pomocí tzv. Základní věty algebry: Každý polynom stupně alespon 1 má nejméně 1 kořen.)

Lemma 2.31 *Nechť jsou dány vektory*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, \dots, \dots, a_{1n}) \\ \mathbf{a}_2 &= (0, a_{22}, \dots, \dots, \dots, a_{2n}) \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_k &= (0, 0, \dots, a_{kk}, \dots, a_{kn}) \end{aligned}$$

$k \leq n$ a necht' $a_{jj} \neq 0 \ \forall j = 1, \dots, n$. Pak jsou vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ LN.

Důkaz je zřejmý. □

Lineární závislost, resp. lineární nezávislost vektorů zkoumáme tak, že zjišťujeme, zda $\exists$ netriviální l.k. vektorů, resp. zda pouze triviální l.k. vektorů je rovna nulovému vektoru. Používáme k tomu následující větu.

Věta 2.32 *Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$*

1. *Nechť $\exists j \in \{1, \dots, k\} :: \mathbf{u}_j = \mathbf{o}$. Pak jsou vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ LZ.*
2. *Nechť $\exists i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j :: \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_j$. Pak jsou vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ LZ.*
3. *Změna pořadí nemění LZ či LN.*
4. *Vynásobením některého vektoru nenulovým číslem λ se nezmění LZ či LN.*
 (i) $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ LN $\Leftrightarrow \mathbf{u}_1, \dots, \lambda \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_k$ LN
 (ii) $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ LZ $\Leftrightarrow \mathbf{u}_1, \dots, \lambda \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_k$ LZ
5. *Přičtením některého vektoru k jinému vektoru se nezmění LZ či LN.*
 (i) $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ LN $\Leftrightarrow \mathbf{u}_1, \dots, (\mathbf{u}_j + \mathbf{u}_\ell), \dots, \mathbf{u}_k$ LN
 (ii) $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ LZ $\Leftrightarrow \mathbf{u}_1, \dots, (\mathbf{u}_j + \mathbf{u}_\ell), \dots, \mathbf{u}_k$ LZ
6. *Přičtením k libovolnému $\mathbf{u}_i$ lineární kombinace ostatních se nezmění LZ či LN.*

Důkaz Vydeme z definice LZ, resp. LN

1. $\mathbf{u}_j = \mathbf{o}$ je netriviální l.k. rovná nulovému vektoru.
2. $\mathbf{u}_i + (-1)\mathbf{u}_j = \mathbf{o}$ je netriviální l.k. rovná nulovému vektoru.
3. zřejmé
4. Ad (i) $\boxed{\Rightarrow}$ $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ LN $\Leftrightarrow (\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{u}_i = \mathbf{o} \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i)$. Necht' $\lambda \neq 0$ a uvažujme l.k. vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \lambda \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_k$, pro jisté j a položme ji rovnu nulovému vektoru:

$$\begin{aligned} \mathbf{o} &= \alpha_j(\lambda \mathbf{u}_j) + \sum_{i \neq j} \alpha_i \mathbf{u}_i \\ &= (\alpha_j \lambda) \mathbf{u}_j + \sum_{i \neq j} \alpha_i \mathbf{u}_i. \end{aligned}$$

Z LN vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ plyne, že $\alpha_j \lambda = 0, \alpha_i = 0, i \neq j$ a z nenulovosti λ dostáváme $\alpha_j = 0$. Neexistuje tedy netriviální l.k. vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \lambda \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_k$ rovná nulovému vektoru.

Ad (i) $\boxed{\Leftarrow}$ Na základě právě dokázaného se ukáže, že z lineární nezávislosti vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \lambda \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_k$ plyne lineární nezávislost $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \frac{1}{\lambda} \lambda \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_k$.

Případ (ii) se dokáže sporem.

5. Ad (i) $\boxed{\Rightarrow}$ Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ jsou LN. Utvořme l.k. $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j + \mathbf{u}_\ell, \dots, \mathbf{u}_k$ a položme ji rovnu nulovému vektoru

$$\begin{aligned} \mathbf{o} &= \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_j (\mathbf{u}_j + \mathbf{u}_\ell) + \dots + \alpha_k \mathbf{u}_k \\ &= \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_j \mathbf{u}_j + \dots + (\alpha_\ell + \alpha_j) \mathbf{u}_\ell + \dots + \alpha_k \mathbf{u}_k. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Protože $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ jsou LN, plyne odtud $0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_j = \dots = (\alpha_\ell + \alpha_j) = \dots = \alpha_k$. Z nulovosti α_j a rovnosti $\alpha_\ell + \alpha_j = 0$ dostáváme $\alpha_\ell = 0$. V l.k. (2.3.1) jsou tedy všechny koeficienty nulové. Vektory v (2.3.1) jsou tedy LN. Ad (i) $\boxed{\Leftarrow}$ Na základě právě dokázaného se ukáže, že z lineární nezávislosti vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j + \mathbf{u}_\ell, \dots, \mathbf{u}_k$ plyne lineární nezávislost $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_j + \mathbf{u}_\ell + (-\mathbf{u}_\ell), \dots, \mathbf{u}_k$.

Případ (ii) se dokáže sporem.

6. Plyne z 4. a 5.

□

Užití: množinu vektorů nahradíme pomocí předchozí věty množinou vektorů, o nichž snadno rozhodneme, zda jsou LN či LZ.

Příklad 2.33

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{LN}$$

Řešení pomocí MAPLE

```
[> with(linalg):
> A:=array(1..3,1..4,[[1,1,-1,1],[2,1,3,0],[1,1,1,1]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
[> gausselim(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Příklad 2.34

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{LN}$$

Příklad 2.35

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{LZ}$$

2.4 Báze a dimenze vektorového prostoru

K čemu zkoumáme lineární kombinace a LZ či LN?

Příklad 2.36 $\mathbb{R}^3$ $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} u_1(1, 0, 0) \\ + u_2(0, 1, 0) \\ + u_3(0, 0, 1) \\ \hline = (u_1, u_2, u_3) \end{pmatrix}$$

tj.

1. existuje množina tří LN vektorů, ostatní jsou jejich lineární kombinací
2. neexistuje množina s počtem prvků menším než 3, pomocí které bychom vyjádřili jakýkoliv vektor z $\mathbb{R}^3$

Definice 2.37 (*Báze vektorového prostoru*) Množina vektorů $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in V$, kde V je vektorový prostor, pro kterou

1. $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ jsou LN
2. $\forall \mathbf{u} \in V \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} :: \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{b}_i$

se nazývá báze V .

3. přednáška

Náhrada (Mgr. Jiří Škvor, Ph.D.)

Příklad 2.38

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= (1, 1, 1) \\ \mathbf{b}_2 &= (0, 1, 1) \\ \mathbf{b}_3 &= (0, 0, 1) \end{aligned} \quad \text{LN}, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$\mathbf{u}$ lze vyjádřit jako l.k. $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$:

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathbf{b}_i = \begin{pmatrix} \alpha_1(1, 1, 1) \\ + \alpha_2(0, 1, 1) \\ + \alpha_3(0, 0, 1) \\ \hline = (u_1, u_2, u_3) \end{pmatrix}$$

kde α_i najdeme jako řešení soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Tato soustava má právě jedno řešení $\alpha_1 = u_1$, $\alpha_2 = u_2 - u_1$, $\alpha_3 = (u_3 - u_2)$ a vektory $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_3$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$.

Poznámka 2.39 1. Bázi vektorového prostoru V je nekonečně mnoho.
 2. Báze nemusí být konečná (např. $C(I)$ - prostor spojitých funkcí na I).

Věta 2.40 *Nechť V je vektorový prostor, nechť V má bázi o n , prvcích, $n \in \mathbb{N}$. Potom platí*

1. Každou množinu lineárně nezávislých prvků z V lze doplnit na bázi V .
2. Všechny báze vektorového prostoru V mají n prvků.

Důkaz lze najít v ... Nebudeme dokazovat. $\square$

Definice 2.41 (*Dimenze vektorového prostoru*) *Nechť vektorový prostor V má konečnou bázi. Počet prvků báze V nazveme dimenze V a značíme $\dim V$.*

Příklad 2.42 $\mathbb{R}^n$ - n -dimenzionální vektorový prostor

Π_n (prostor polynomů st. $\leq n$) - $(n+1)$ -dimenzionální vektorový prostor

Π (prostor polynomů) - nekonečnědimenzionální prostor

Poznámka 2.43 Pro určení vektorového prostoru stačí jeho báze, ostatní prvky dostaneme jako lineární kombinaci prvků báze.

Věta 2.44 *Nechť V je n -dimenzionální vektorový prostor, nechť $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ je báze V , nechť $\mathbf{u} \in V$. Pak existuje právě jedna n -tice $\alpha_1, \dots, \alpha_n$:*

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{b}_i$$

Čísla $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ se nazývají souřadnice $\mathbf{u}$ vzhledem k bázi $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$

Důkaz 1. Existence $\alpha_1, \dots, \alpha_n$:: $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{b}_i$ plyne z definice báze,
 2. jednoznačnost $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ plyne z LN $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$, důkaz sporem:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{b}_i = \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{b}_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) \mathbf{b}_i = \mathbf{o} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_i = \beta_i \\ \forall i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Využili jsme toho, že $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}$. $\square$

Poznámka 2.45 Nalezení koeficientů α_i lineární kombinace pro vyjádření vektoru $\mathbf{u}$ pomocí prvků báze představuje řešení soustavy rovnic

$$(\mathbf{b}_1^T \cdots \mathbf{b}_n^T) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{b}_i^T$ je sloupcový vektor, viz příklad 2.38.

Poznámka 2.46 Existuje vzájemně jednoznačné (prosté a na) zobrazení prostoru V dimenze n na $\mathbb{R}^n$. (Definice prostého zobrazení a zobrazení na bude zavedena později.)

Věta 2.47 *Nechť V je vektorový prostor, $\dim V = n$, $n \in \mathbb{N}$, a nechť $W \subset V$ je podprostor V , $W \neq V$. Potom $\dim W < n$.*

Důkaz sporem. Uvažujte $u \in V \setminus W$. □

Poznámka 2.48 $\{o\}$, V - tzv. triviální podprostory V .

Definice 2.49 (*Lineární obal vektorů*) *Nechť V je vektorový prostor, $u_1, \dots, u_k \in V$. Množinu $\mathcal{L}(u_1, \dots, u_k) = \{v; v = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$ nazveme lineárním obalem vektorů $u_1, \dots, u_k$.*

Je zřejmé, že

$$\begin{array}{l} \dim \mathcal{L} = k, \text{ jsou-li } u_1, \dots, u_k \text{ LN} \\ < k \text{ LZ} \end{array}$$

Poznámka 2.50 $\mathcal{L}(u_1, \dots, u_k)$ je vektorový prostor.

Příklad 2.51

$$\begin{array}{l} u_1 = (1, 2) \\ u_2 = (2, -1) \end{array} \quad \mathcal{L}(u_1, u_2) = \mathbb{R}^2$$

$$\begin{array}{l} u_1 = (1, 2, 0) \\ u_2 = (2, -1, 0) \end{array} \quad \mathcal{L}(u_1, u_2) \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{podprostor dimenze 2}$$

Příklad 2.52 $\mathcal{L}(1, x^2, x^4) = \{p(x); p(x) = ax^4 + bx^2 + c\}$ množina bikvadratických polynomů

2.5 Lineární zobrazení

Definice 2.53 *Nechť U, V jsou vektorové prostory. Zobrazení $L : U \longrightarrow V$ nazveme lineárním jestliže*

$$\begin{array}{ll} (i) & L(u + v) = L(u) + L(v) \quad \forall u, v \in U \\ (ii) & L(\alpha u) = \alpha L(u) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in U \end{array}$$

Poznámka 2.54 Platí

1. $L(\sum \alpha_i u_i) = \sum \alpha_i L(u_i)$
2. $L(o) = o$ (nulový prvek v obou prostorech značíme stejně)
tj. $L(o) \neq o \Rightarrow L$ není lineární zobrazení
3. $U = V = \mathbb{R}$, $L : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lineární, potom $\exists a \in \mathbb{R} :: L(x) = ax$
Důkaz plyne z vlastností L
 $x \in \mathbb{R}$, $\underline{L(x)} = L(1x) = L(x1) = xL(1) = L(1)x = \underline{ax}$, kde $a = L(1)$
Lineární funkce $f(x) = kx + q$ NENÍ lineárním zobrazením podle definice

Příklad 2.55 (lineární zobrazení)

1. $L : \mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 0) \in \mathbb{R}^3$
 2. $L : C[a, b] \ni f \longrightarrow \int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R}$
 3. $L : C^1[a, b] \ni f \longrightarrow f' \in C[a, b]$
 4. $L : C^1[a, b] \ni y \longrightarrow y' + p(x)y \in C[a, b]$
- lineární diferenciální operátor

Příklad 2.56 (zobrazení, které není lineární)

$$F : \mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) = x \longrightarrow F(x) = (x_1, x_2, 1) \in \mathbb{R}^3$$

Věta 2.57 *Nechť U, V jsou vektorové prostory, necht' $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ je báze vektorového prostoru U . Lineární zobrazení $L : U \longrightarrow V$ je určeno, známe-li $L(\mathbf{b}_1), \dots, L(\mathbf{b}_n)$.*

Důkaz

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \in U, \quad \mathbf{u} &= \sum \alpha_i \mathbf{b}_i \quad (\text{předp. že } \alpha_i \text{ jsou známy}) \\ L(\mathbf{u}) &= L\left(\sum \alpha_i \mathbf{b}_i\right) = \sum \alpha_i L(\mathbf{b}_i) \end{aligned}$$

□

Příklad 2.58 (Určení lineárního zobrazení známe-li obrazy báze)

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2, \mathbf{e}_1 &= (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1) & L(\mathbf{e}_1) &= (-1, 1) \\ & & L(\mathbf{e}_2) &= (2, 1) \\ x = (x_1, x_2) &= x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2, \quad \underline{L(x_1, x_2)} &= x_1 L(\mathbf{e}_1) + x_2 L(\mathbf{e}_2) \\ & & &= x_1(-1, 1) + x_2(2, 1) \\ & & &= \underline{(-x_1 + 2x_2, x_1 + x_2)} \end{aligned}$$

Příklad 2.59 (Otočení vektoru $\mathbf{u}$ v rovině o úhel α v kladném smyslu (proti směru hodinových ručiček) jako lineární zobrazení)

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2, \mathbf{e}_1 &= (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1), & L(\mathbf{e}_1) &= (\cos \alpha, \sin \alpha) \\ & & L(\mathbf{e}_2) &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right) \\ & & &= (-\sin \alpha, \cos \alpha) \\ \mathbf{u} = (u_1, u_2) &= u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2, & \underline{L(\mathbf{u})} &= u_1 L(\mathbf{e}_1) + u_2 L(\mathbf{e}_2) \\ & & &= u_1(\cos \alpha, \sin \alpha) + u_2(-\sin \alpha, \cos \alpha) \\ & & &= \underline{(u_1 \cos \alpha - u_2 \sin \alpha, u_1 \sin \alpha + u_2 \cos \alpha)} \end{aligned}$$

2.6 Skalární součin a norma

2.6.1 Skalární součin

Definice 2.60 (*skalární součin*) Reálná funkce $(\cdot, \cdot)$ na $V \times V$, kde V je vektorový prostor se nazývá skalární součin na V , jestliže $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ a $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ platí

1. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w})$,
2. $(\lambda \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v})$,
3. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$,
4. $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0 \quad \forall \mathbf{u} \neq 0$.

Příklad 2.61 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

Příklad 2.62 $\Pi_n \times \Pi_n$

$$(p, q) = \int_a^b p(x)q(x)dx$$

Poznámka 2.63 Cauchyho nerovnost v $\mathbb{R}^n$: $|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$,

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\sum u_i^2}.$$

Definice 2.64 Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem. Řekneme, že vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $\mathbf{u} \neq 0, \mathbf{v} \neq 0$, jsou ortogonální, jestliže $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$.

Definice 2.65 (*norma $\|\cdot\|$*) Nechť V je vektorový prostor. Funkce $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, +\infty)$ se nazývá norma na V , jestliže

1. $\forall \mathbf{u} \in V, \|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = 0$,
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in V \quad \|\lambda \mathbf{u}\| = |\lambda| \|\mathbf{u}\|$,
3. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \quad \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (*trojúhelníková nerovnost*)

Příklad 2.66 $\mathbb{R}^n, |\cdot|$ (absolutní hodnota)

Věta 2.67 Nechť V je lineární prostor, $(\cdot, \cdot)$ skalární součin na V . Potom $\|\mathbf{u}\| := \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$ je norma na V

Důkaz Cvičení $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v})} \leq \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq \sqrt{(\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2}$ (Viz Cauchyho nerovnost níže). $\square$

Poznámka 2.68 Norma z předchozí věty se nazývá norma indukovaná skalárním součinem.

Věta 2.69 (Cauchyho nerovnost) *Nechť V je vektorový prostor, $(\cdot, \cdot)$ skalární součin na V , $\|\cdot\|$ norma indukovaná skalárním součinem $(\cdot, \cdot)$ na V . Potom*

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\| \forall u, v \in V.$$

Důkaz $0 \leq \|u + \alpha v\|^2 = (u + \alpha v, u + \alpha v) = \|u\|^2 + 2\alpha(u, v) + \|v\|^2 \alpha^2$. Poslední výraz je nezápornou kvadratickou funkcí proměnné α , její diskriminant $D = (u, v)^2 - \|u\|^2 \|v\|^2$ je tedy nekladný, odkud dostáváme tvrzení věty. $\square$

Svátek 28. října 2009

Náhrada (Mgr. Jiří Škvor, Ph.D.)

Definice 3.1 Tabulku $m \times n$, $m, n \in \mathbb{N}$, reálných čísel

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i=1, \dots, m}^{j=1, \dots, n}$$

nazveme maticí typu $m \times n$. Matice značíme velkými písmeny $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \dots$ $(a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in})$ i -tý řádek matice $\mathbb{A}$ (řádkový vektor)

$$(a_{1j} \ a_{2j} \ \cdots \ a_{mj})^T = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad j\text{-tý sloupec matice } \mathbb{A} \text{ (sloupcový vektor)}$$

Matice typu $m \times m$, $m \in \mathbb{N}$, nazveme čtvercovou maticí řádu m .**3.1 Operace s maticemi**Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i=1, \dots, m}^{j=1, \dots, n}$, $\mathbb{B} = (b_{ij})_{i=1, \dots, m}^{j=1, \dots, n}$ jsou matice typu $m \times n$. Definujeme rovnost matic

$$\mathbb{A} = \mathbb{B} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij} \quad \forall \begin{matrix} i = 1, \dots, m, \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

Na množině matic typu $m \times n$ definujeme operace sčítání matic $(+)$ a násobení matice reálným číslem $(\cdot)$

$$(i) \quad \mathbb{A} + \mathbb{B} = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$(ii) \quad \alpha \mathbb{A} = (\alpha a_{ij})$$

Věta 3.2 Množina matic typu $m \times n$ je vektorový prostor dimenze $m \times n$. Bázi tvoří matice

$$\mathbb{A}_{ij} = \begin{matrix} & & j \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Důkaz - domácí cvičení na ověření axiomů vektorového prostoru. $\square$

3.1.1 *Speciální matice*

($\times$ značí nenulové prvky)

1. nulová matice typu $m \times n$ - prvky jsou rovny nule
2. jednotková matice řádu m

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

3. diagonální matice řádu m

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

4. pásová matice (např. třídiagonální)

$$\begin{pmatrix} \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{pmatrix}$$

5. horní lichoběžníková (trojúhelníková) typu $m \times n, m \leq n, a_{ij} = 0, i > j$

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{pmatrix}$$

6. dolní lichoběžníková (trojúhelníková) typu $m \times n, m \geq n, a_{ij} = 0, i < j$

$$\begin{pmatrix} \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}$$

7. transponovaná $\mathbb{A}^T = (a_{ij}^T) = (a_{ji})$ typu $n \times m$ (záměna řádků a sloupců)

Příklad 3.3

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Je-li $\mathbb{A}$ čtvercová a $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$, nazývá se matice $\mathbb{A}$ symetrická.

Příklad 3.4

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2 Hodnost matice

Definice 3.5 Hodností matice $\mathbb{A}$ nazýváme počet lineárně nezávislých řádků. Hodnost matice $\mathbb{A}$ značíme $h(\mathbb{A})$ nebo $\text{Rank}(\mathbb{A})$.

Věta 3.6 Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu $m \times n$. Potom platí

1. $\text{Rank}(\mathbb{A}) \leq m$
2. Je-li $\mathbb{A}$ horní lichoběžníková (trojúhelníková), $m \leq n$, $a_{ii} \neq 0$, $\forall i$, je $\text{Rank}(\mathbb{A}) = m$
3. $\text{Rank}(\mathbb{A}) \leq \min(m, n)$

Důkaz 1. z definice

2. viz lemma 2.31

3. $\text{Rank}(\mathbb{A}) \leq n$, neboť řádkové vektory jsou prvky $\mathbb{R}^n$ a dimenze lineárního obalu řádkových vektorů je menší nebo rovna n .

□

Věta 3.7 Hodnost matice $\mathbb{A}$ je rovna hodnosti matice $\mathbb{A}^T$, tj. maximální počet lineárně nezávislých řádků matice $\mathbb{A}$ je roven maximálnímu počtu lineárně nezávislých sloupců matice $\mathbb{A}$ ('ZÁZRAK').

Důkaz nebudeme dělat, viz např. ...

□

Příklad 3.8

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leq 3, \quad \text{Rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

3.2.1 Určení hodnosti matice

Věta 3.9 Hodnost matice $\mathbb{A}$ se nezmění, jestliže

1. zaměníme pořadí řádků (sloupců) matice $\mathbb{A}$
2. vynásobíme řádek (sloupec) matice $\mathbb{A}$ nenulovým číslem
3. k řádku matice $\mathbb{A}$ přičteme jiný řádek matice $\mathbb{A}$
4. vynecháme nulový řádek

Důkaz plyne z věty 2.32.

□

Definice 3.10 (Ekvivalentní úpravy matic) Úpravy matice $\mathbb{A}$ z věty 3.9 nazýváme ekvivalentními úpravami matice $\mathbb{A}$. Matice $\mathbb{B}$, kterou dostaneme z matice $\mathbb{A}$ ekvivalentními úpravami nazýváme ekvivalentní maticí s maticí $\mathbb{A}$.

Příklad 3.11

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{32}{5} \end{pmatrix}$$

Definice 3.12 (*regulární, singulární matice*) Necht $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n . Řekneme, že $\mathbb{A}$ je regulární, je-li $\text{Rank}(\mathbb{A})=n$. Je-li $\text{Rank}(\mathbb{A}) < n$, řekneme, že $\mathbb{A}$ je singulární.

Poznámka 3.13 Tato definice bude později nahrazena jinou definicí pomocí determinantu.

3.3 Násobení matic

Definice 3.14 (*násobení matic*)

Příklad 3.15 ...

Poznámka 3.16 Násobení matic není komutativní, součin dvou nenulových matic může být nulový.

3.3.1 Vlastnosti násobení matic

BIBLIOGRAFIE

- Klíč, A. (1998). *Matematika I*. Skripta. Vydavatelství VŠCHT, Praha.
- Krylová, N. and Štědrý, M. (2004). *Sbírka příkladů z matematiky I*. Učební texty Univerzity Karlovy v Praze. Karolinum, Praha. ISBN 80-246-0565-1.
- Marcus, S. (1976). *Matematická analýza čtená po druhé*. Academia, Praha.
- Polák, J. (1991). *Přehled středoškolské matematiky*. Prometheus.
- Štědrý, M. (2004). *Sbírka úloh k matematice pro geografii*. Učební texty Univerzity Karlovy v Praze. Karolinum, Praha.
- Štěpánek, J. (1979a). *Matematika pro chemiky - fyziky I*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha.
- Štěpánek, J. (1979b). *Matematika pro chemiky - fyziky II*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha.
- Turzík, D. (1998). *Matematika II*. Skripta. Vydavatelství VŠCHT, Praha.
- Veselý, J. (2004). *Matematická analýza pro učitele*. Matfyzpress, Praha.