Úloha 2.1 (úloha o rozdělení sázky)

Uvažujme dva stejně dobré hráče, kteří hrají sérii her, ve kterých není remíza.

Oba vsadili stejnou částku a dohodli se, že kdo první vyhraje 6 her, získá celou vsazenou sumu peněz.

V době, kdy první hráč vyhrál 5 her a druhý 3 hry, museli svůj souboj přerušit.

Jak si mají sázku spravedlivě rozdělit?

Nedostatky klasické pravděpodobnosti

Pouze konečný počet elementárních jevů,

všechny elementární jevy stejně pravděpodobné,

definice kruhem.

Nedostatky klasické pravděpodobnosti

Příklad:

opakujeme hody spravedlivou mincí, dokud nepadne líc.

Kolmogorovova definice pravděpodobnosti

Vhodný matematický model pro náhodný pokus vypracoval Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903–1987). Jeho axiomatický přístup (publikovaný v roce 1933) tvoří matematické základy moderní teorie pravděpodobnosti.

Mějme prostor Ω (může být nekonečný), jeho prvky označme elementární jevy.

σ-algebra

Definice: σ*-algebra* $\mathcal{A}$ je neprázdný systém podmnožin Ω, který je uzavřený ke spočetným sjednocením a doplňkům, neboli $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \cup_i A_i \in \mathcal{A}$ a $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.

Vlastnosti:

(i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$
$(\exists A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ a $A \cup A^c \cup \dots = \Omega \in \mathcal{A} \Rightarrow \emptyset = \Omega^c \in \mathcal{A})$

(ii) $A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \cap_i A_i \in \mathcal{A}$ (plyne z uzavřenosti ke spočetným sjednocením a z de Morganových pravidel)

(iii) $\mathcal{A}$ je uzavřena na konečná sjednocení a průniky

(iv) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

Pravděpodobnost jako míra

Definice: *Pravděpodobnost* je konečná, nezáporná a σ-aditivní funkce P na $\mathcal{A}$, tj. $P(A) \geq 0$ pro každé $A \in \mathcal{A}$, $P(\Omega) = 1$ a $P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$ pro $\{A_i\}$ po dvou disjunktní.

Vlastnosti:

(i) $P(\emptyset) = 0$

(ii) $P(A) + P(A^c) = 1$

(iii) $P(A) \leq P(B)$, pokud $A \subseteq B$

(iv) $0 \leq P(A) \leq 1$ pro každé $A \in \mathcal{A}$

Terminologie a vztah ke klasické pravděpodobnosti

Terminologie: $A \in \mathcal{A}$ ... (náhodný) jev, A^c ... opačný jev k A, $\emptyset$ ... nemožný jev, Ω ... jistý jev, $A \cap B = \emptyset$ ... neslučitelné jevy

Pokud má Ω jen konečně nebo spočetně mnoho prvků, pak se za $\mathcal{A}$ bere systém všech podmnožin prostoru Ω: $\mathcal{A} = 2^\Omega$. Je-li Ω nespočetný prostor, omezíme se na některé jeho podmnožiny.

Vztah Kolmogorovovy definice ke klasické definici: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, $\mathcal{A} = 2^\Omega$, $P(\{\omega_1\}) = \cdots = P(\{\omega_n\}) \Rightarrow P(\{\omega_i\}) = 1/n$ a $P(A) = k/n$ pro $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$.

Úloha 2.2 (hazardní hry)

Která z následujících událostí je nejpravděpodobnější?

a) výhra prvního pořadí v jednom tahu Sportky (uhodnutí 6 čísel z 49),

b) 24 líců ve 24 hodech mincí,

c) obdržení jen vysokých karet (10, J, Q, K, A) v bridži (rozdává se 13 karet z 52),

d) alespoň 5 nul v 6 kolech evropské rulety?

Hlasovací otázka 2

Jaká je pravděpodobnost, že při hodu 3 kostkami padne dvě či více stejných čísel? Hledaná pravděpodobnost leží v intervalu:

A) [0,0; 0,2)

B) [0,2; 0,4)

C) [0,4; 0,6)

D) [0,6; 0,8)

E) [0,8; 1,0]

Úloha 2.3 (narozeninový problém)

Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině *n* lidí existuje dvojice, která má narozeniny ve stejný den?

Jak velké musí být *n*, aby tato pravděpodobnost byla aspoň $1/2$?

Pro jednoduchost neuvažujme přestupné roky a předpokládejme, že dny narození jsou rovnoměrně rozděleny během roku.

Bonusová úloha 2.4 (těsně vedle se taky počítá)

Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině n lidí existuje dvojice, u které se data narozenin liší maximálně o jeden den?

Jak velké musí být n, aby tato pravděpodobnost byla aspoň $1/2$?