Nezávislost jevů

Definice: Řekneme, že jevy A a B jsou *nezávislé*, pokud $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Poznámka: Neslučitelné jevy A a B (tj. $A \cap B = \emptyset$) kladné pravděpodobnosti nejsou nezávislé (tedy jsou *závislé*), protože $P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$. Například při hodu mincí jevy, že padne rub a že padne líc, jsou závislé.

Poznámka: Když A a B jsou nezávislé, pak A a B^c jsou nezávislé, protože $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$. Podobně A^c a B jsou nezávislé a A^c a B^c jsou nezávislé.

Definice: Řekneme, že jevy $A_1, \ldots, A_n$ jsou *nezávislé*, pokud

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k})$$

pro každé $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $k \in \{2, \ldots, n\}$.

Příkladem nezávislých jevů jsou opakované hody mincí nebo kostkou.

Příklad: Při dvou hodech mincí označme jev A, že v prvním hodu padne rub, jev B, že v druhém hodu padne rub, a jev C, že právě jednou padne rub. Potom $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 1/4$, ale $P(A \cap B \cap C) = 0$. Znamená to, že jevy A, B, C jsou po dvou nezávislé, ale nejsou (sdruženě) nezávislé.

Příklad: Při třech hodech mincí označme jev A, že v prvním hodu padne rub, jev B, že v druhém hodu padne rub, a jev C, že padne nejprve k líců a poté $3 - k$ rubů ($k = 0, 1, 2, 3$). Z předchozí úlohy víme, že $P(A) = P(B) = 1/2$ a jevy A, B jsou nezávislé. Dále $P(C) = 1/2$, $P(A \cap C) = 1/8$ a $P(B \cap C) = 1/4$, takže B a C jsou nezávislé, zatímco A a C nezávislé nejsou. Ještě si všimněneme, že $P(A \cap B \cap C) = 1/8 = P(A)P(B)P(C)$, ale nemůžeme mluvit o nezávislosti jevů A, B, C.

Poslední příklad ukazuje, že z nezávislosti A a B a nezávislosti B a C ještě nemůžeme vyvozovat nezávislost jevů $A \cap C$ a B. Také nemůžeme vyvozovat nezávislost A a C (relace není tranzitivní).

Zadání: Dva hráči hrají ruskou ruletu, po každém výstřelu se bubínek revolveru znovu náhodně protočí. Domluví se, že maximálně provedou dohromady 6 výstřelů. S jakými pravděpodobnostmi tato zábava může dopadnout?

Řešení: Všechny možné výsledky můžeme kódovat posloupností N (komora byla prázdná, hráč přežil) a Z (hráč zemřel):

$$\Omega = \{Z, NZ, NNZ, NNNZ, NNNNZ, NNNNNZ, NNNNNN\}.$$

Zřejmě se nejedná o klasický pravděpodobnostní model, protože jednotlivé jevy nemají stejnou pravděpodobnost.

Abychom mohli použít klasickou pravděpodobnost, představme si úlohu jako výběr s vracením z osudí s 6 koulemi, z nichž jedna (např. černá) označuje komoru s nábojem. Pak všech možností, jak vytáhnout 6 koulí je 6^6, jevu $\{Z\}$ odpovídá 6^5 možností, jevu

$\{NZ\}$ celkem $5 \cdot 6^4$ možností atd. To nás vede k těmto pravděpodobnostem: $P(Z) = 1/6$, $P(NZ) = 5/6^2$, $P(NNZ) = 5^2/6^3$, $P(NNNZ) = 5^3/6^4$, $P(NNNNZ) = 5^4/6^5$, $P(NNNNNZ) = 5^5/6^6$.

Jiný způsob, jak k ním dojít, je využít nezávislost. V jednom pokusu čekáme $P(Z) = 1/6$ a $P(N) = 5/6$. Jednotlivé pokusy jsou nezávislé, a proto $P(NZ) = 5/6^2$, $P(NNZ) = 5^2/6^3$ atd.

Nyní dopočítáme hledané pravděpodobnosti podle pravidla o pravděpodobnosti sjednocení neslučitelných jevů.

První hráč zemře s pravděpodobností $1/6 + 5^2/6^3 + 5^4/6^5 = (6^4 + 5^2 \cdot 6^2 + 5^4)/6^5 = 2\,821/7\,776 \doteq 0{,}363$.

Druhý hráč zemře s pravděpodobností $5/6^2 + 5^3/6^4 + 5^5/6^6 = (5 \cdot 6^4 + 5^3 \cdot 6^2 + 5^5)/6^6 = 14\,105/46\,656 \doteq 0{,}302$.

Přes doplňkovou pravděpodobnost vyjde, že nikdo nezemře s pravděpodobností $1 - 2\,821/7\,776 - 14\,105/46\,656 = 15\,625/46\,656 \doteq 0{,}335$.

Zadání: Jak budou vypadat pravděpodobnosti, když necháme hráče hrát (tahat z osudí) do úplného rozhodnutí?

Řešení: Tentokrát budeme potřebovat nekonečně mnoho elementárních jevů:

$$\Omega = \{Z, NZ, NNZ, \dots\} \cup \{NNN\dots\}.$$

Můžeme postupovat podobně jako v příkladu s házení mincí nebo využít nezávislost jednotlivých tahů. Pak pravděpodobnost vytažení černé poprvé v k-tém pokusu je $5^{k-1}/6^k$. První prohraje (zemře), když černá bude poprvé tažena v lichém pokusu, to má pravděpodobnost

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{5^{2m}}{6^{2m+1}} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{25}{36}\right)^m = \frac{6}{11} \doteq 0{,}545.$$

Zadání: Extrémní varianta ruské rulety je, že se po výstřelu bubínek neprotáčí. Jak se změní výsledné pravděpodobnosti?

Řešení: Situace odpovídá výběru bez vracení. Jednotlivé pokusy nejsou nezávislé. Pravděpodobnost, že první zemře po prvním pokusu, je $5!/6! = 1/6$. Druhý zemře ve druhém pokusu s pravděpodobností $5!/6! = 1/6$ atd. Oba mají tedy stejnou šanci přežít, jedná se o spravedlivou hru.