Úloha 11.1

Při hodu třemi šestistěnnými kostkami nás zajímá součet padlých ok, označme jej X.

Určete rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X, tedy pravděpodobnosti $p_k = P(X = k)$, pro všechna vhodná k.

Úloha 11.2 (počet her v úloze o rozdělení sázky)

Uvažujme dva stejně dobré hráče, kteří hrají sérii her, ve kterých není remíza. Oba vsadili stejnou částku a dohodli se, že kdo první vyhraje 6 her, získá celou vsazenou sumu peněz. V době, kdy první hráč vyhrál 5 her a druhý 3 hry, museli svůj souboj přerušit.

Jaké je rozdělení a střední hodnota počtu zbývajících partií potřebných k dosažení rozhodnutí?

Jaké by bylo rozdělení počtu všech odehraných partií od začátku až po stav, kdy někdo vyhraje n her?

Úloha 11.3 (placení obědů)

Skupina m lidí chodí společně na oběd. Po jídle se náhodně určí jeden z nich, kdo to za všechny zaplatí.

Jaká je pravděpodobnost, že se při k-tém obědě prvně přihodí, že někdo bude muset platit podruhé?

Jaká je střední hodnota počtu obědů, kdy k tomu dojde?

Úloha 11.4 (hra Chuck-a-Luck)

Uvažujme hazardní hru, která se hraje se 3 hracími kostkami. Hráč má možnost vybrat si kterékoli z čísel $1, \ldots, 6$.

Pokud zvolené číslo nepadne ani na jedné kostce, musí zaplatit 100 korun.

Když naopak padne aspoň na jedné kostce, vyhrává vždy určitou částku, a to buď 100 korun, pokud dané číslo padlo právě jednou, 200 korun, když padlo dvakrát, nebo 300 korun, jestliže bylo dosaženo třikrát.

Jaký je střední zisk hráče z jedné takovéto hry?

Řešení

Úloha 11.2: Za stavu 5:3 je $P(X=1)=1/2$, $P(X=2)=1/4$, $P(X=3)=1/4$ a $\mathbb{E}X=7/4$.
Za stavu 0:0 je $P(X=n+k)=\binom{n+k-1}{k}\frac{1}{2^{n+k-1}}$ pro $k=0,\dots,n-1$.

Úloha 11.3: $p_k=P(X=k)$, zřejmě $p_1=0$ a $p_k=0$ pro $k\geq m+2$, přímo lze zjistit: $p_k=\frac{m(m-1)\cdots(m-k+2)(k-1)}{m^k}$ pro $k=2,\dots,m+1$,
nebo také $P(X>k)=\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{m^k}$ a odtud
$p_k=P(X>k-1)-P(X>k)$,
$\mathbb{E}X=\sum_{k=2}^{m+1}k\frac{m!(k-1)}{m^k(m-k+1)!}=\sum_{j=1}^{m}\frac{m!j(j+1)}{(m-j)!m^{j+1}}$.

Úloha 11.4: Střední zisk hráče je
$-100\cdot\frac{125}{216}+100\cdot\frac{75}{216}+200\cdot\frac{15}{216}+300\cdot\frac{1}{216}\doteq-7{,}87$.
V některých variantách se v případě 3 stejných správných čísel vyhrává 1000 korun, pak je střední ztráta jen 4,63. Spravedlivá by hra byla např. pro rozdělení výher 100, 300 a 500.