Geometrická pravděpodobnost

V některých situacích je přirozené popsat prostor Ω všech elementárních jevů nějakým geometrickým útvarem. Pravděpodobnost jevu $A \subseteq \Omega$ pak můžeme definovat jako $P(A) = |A|/|\Omega|$, kde $|A|$ značí „velikost“ (objem, plocha, délka, ...) množiny A. Potřebujeme, aby prostor Ω měl kladnou a konečnou „velikost“ a všechny jeho prvky měly „stejnou váhu“.

Buffonova úloha o minci

Zadání: (G. L. L. de Buffon, 1733, 1777) Uvažujme podlahu rozdělenou čtvercovou pravidelnou mříží o straně délky a (např. dlaždičky nebo šachovnice). Jaká je pravděpodobnost, že kruhovou mincí o poloměru $r < a/2$ zasáhneme některou z čar mříže?

Řešení: Střed mince padne do právě jednoho ze čtverců mříže, takže stačí uvažovat jeden ze čtverců mříže a vzít $\Omega = [0, a)^2$. Mince nezasáhne žádnou čáru, pokud její střed je ve vzdálenosti větší než r od hranice čtverce. Tyto možné polohy středu mince tvoří čtverec $A^c = [r, a-r)^2$ o straně $a - 2r$. Hledaná pravděpodobnost je

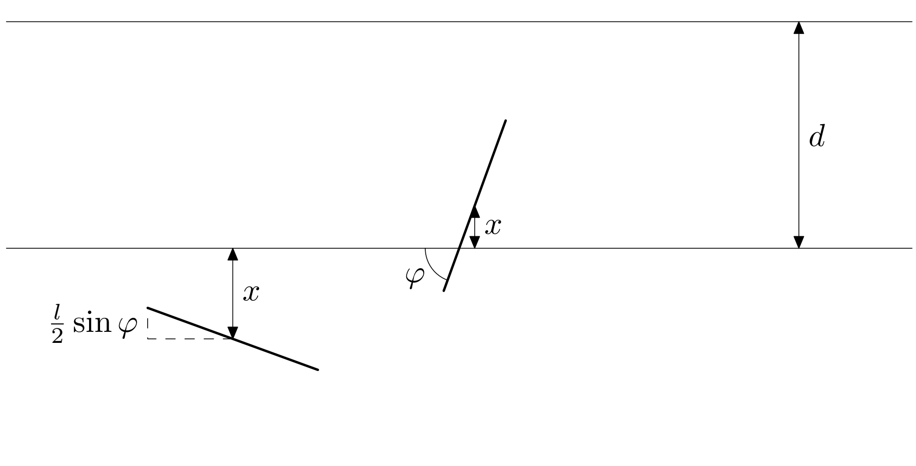
$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{(a-2r)^2}{a^2} = \frac{4r(a-r)}{a^2}.$$

Tato pravděpodobnost je $1/2$ právě tehdy, když $r = (2-\sqrt{2})a/4 \doteq 0{,}146a$.

Buffonova úloha o jehle

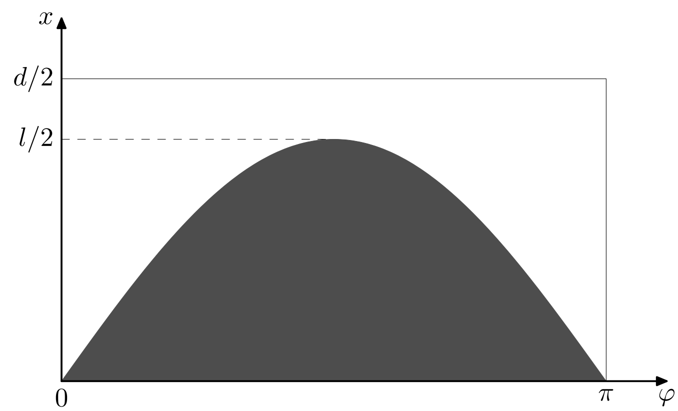
Zadání: (G. L. L. de Buffon, 1733, 1777) Představme si, že jehlu délky ℓ házíme na podlahu, na které jsou v pravidelných vzdálenostech d umístěny rovnoběžné přímky (např. rýhy mezi prkny v dřevěné podlaze). Předpokládejme $\ell < d$. Jaká je pravděpodobnost, že tato jehla protne některou z rovnoběžek?

Řešení: Označme jako y vzdálenost středu jehly od nejbližší rovnoběžky a jako φ úhel, který svírá jehla s touto přímkou. Každou polohu jehly můžeme popsat dvojicí $\varphi \in [0, \pi)$ a $y \in [0, d/2]$. Proto volíme $\Omega = [0, \pi) \times [0, d/2]$.



Jehla protne nejbližší přímku (více než jednu protnout nemůže), jestliže $\frac{\ell}{2}\sin\varphi > y$. Proto je hledaná pravděpodobnost dána jako

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\int_0^\pi \frac{\ell}{2}\sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi}{\pi d/2} = \frac{2\ell}{\pi d}.$$



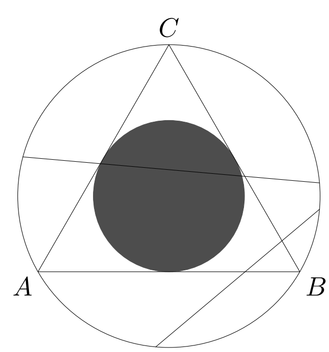
Problém: Jak by vypadal výsledek v případě $\ell > d$?

Bertrandův paradox

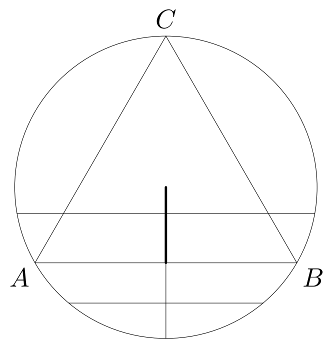
Zadání: (J. Bertrand, 1889) Do kružnice je vepsán rovnostranný trojúhelník. S jakou pravděpodobností je délka náhodně zvolené tětivy v kružnici větší než délka strany tohoto trojúhelníku?

Řešení:

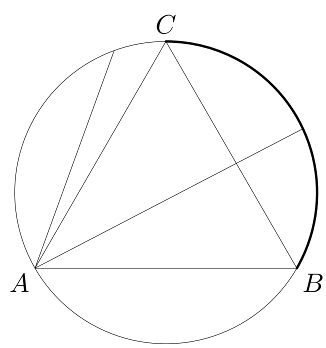
1. Tětiva je jednoznačně určena polohou svého středu (pokud tento střed nesplývá se středem kružnice). Volíme tedy bod (slouží jako střed tětivy) náhodně uvnitř kruhu. Tětiva bude delší než strana trojúhelníku, jakmile její střed padne dovnitř kružnice vepsané trojúhelníku (ta má stejný střed jako původní kružnice a poloviční poloměr). Proto $p = \frac{\pi(r/2)^2}{\pi r^2} = 1/4$.



2. Délka tětivy je jednoznačně určena vzdáleností jejího středu od středu kružnice. Díky symetrii můžeme předpokládat, že střed tětivy leží na daném poloměru kružnice a že střed tětivy je na tomto poloměru rovnoměrně náhodně zvolen. Tětiva bude delší než strana trojúhelníku, když její střed nebude mít od středu kružnice vzdálenost větší než $r/2$. Proto $p = \frac{r/2}{r} = 1/2$.



3. Na kružnici zvolíme náhodně dva body, které tvoří krajní body tětivy. Délka tětivy závisí pouze na relativní poloze obou bodů, díky symetrii tak můžeme předpokládat, že jeden bod je pevný (např. vrchol A) a druhý krajní bod je zvolen rovnoměrně náhodně na kružnici. Tětiva bude delší než strana trojúhelníku, když druhý krajní bod padne do oblouku kružnice, jehož délka se rovná třetině délky celé kružnice a který leží naproti prvnímu krajnímu bodu (oblouk BC). Proto $p = 1/3$.

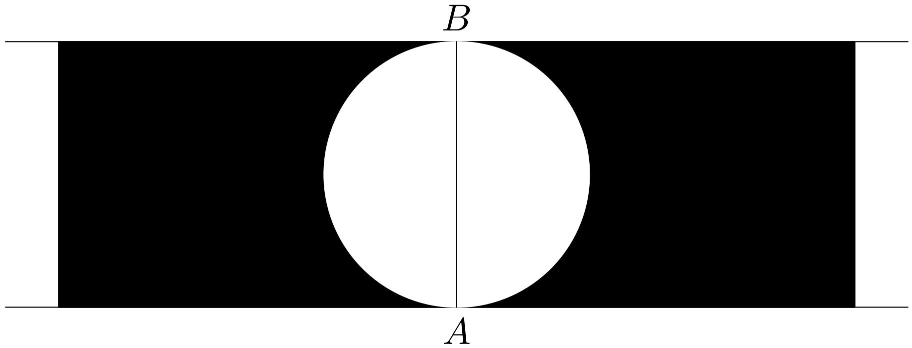


Problém je v tom, že mechanismus náhodné volby tětivy není jasně definován. Paradox spočívá v tom, že tři různé metody náhodné volby tětivy nejsou ekvivalentní. Každý ze tří postupů je vlastně řešením jiné úlohy.

Problém tří bodů

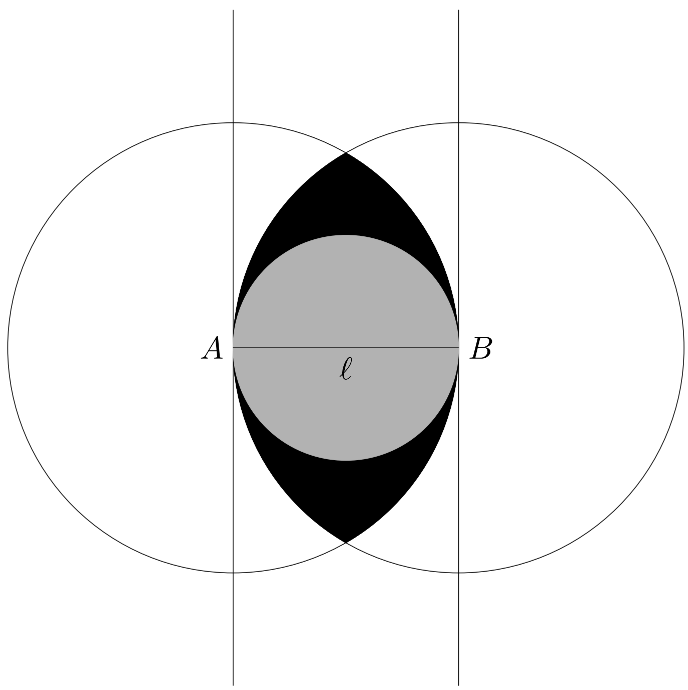
Zadání: (W. S. Woolhouse, 1861) Jaká je pravděpodobnost, že tři náhodně zvolené body v rovině tvoří ostroúhlý trojúhelník?

Řešení: Pro danou stranu AB jsou příznivé pozice vrcholu C tvořeny pásem nad stranou AB bez kruhu o průměru AB. Geometrickou pravděpodobnost nemůžeme použít, protože příslušné oblasti jsou neomezené. A. De Morgan (1871) i přesto argumentoval, že hledaná pravděpodobnost je nekonečně malá.



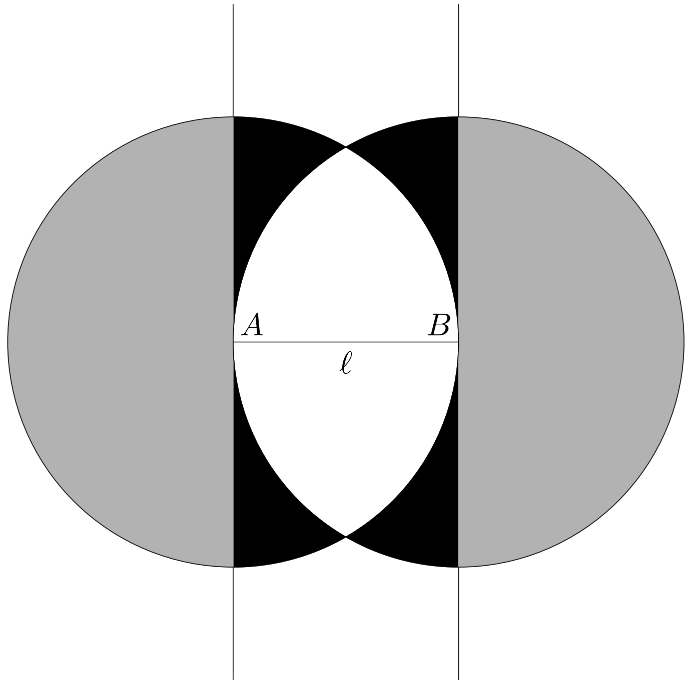
Ch. L. Dodgson (známý pod pseudonymem L. Carroll) uvažoval následovně. Kdybychom předpokládali, že AB je nejdelší strana, potom C může ležet kdekoli v průniku kruhů o poloměru $\ell = |AB|$ a středech A a B. Tento průnik má obsah $2\pi\ell^2/3 - \sqrt{3}\ell^2/2$. Polohy bodu C uvnitř kruhu nad průměrem AB vedou na tupoúhlý trojúhelník, tato oblast má obsah $\pi\ell^2/4$. Pravděpodobnost, že výsledný trojúhelník bude ostroúhlý, je

$$1 - \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}} \doteq 0{,}361.$$



Ovšem když zopakujeme celou úvahu pro případ, kdy AB je druhá nejdelší strana, pak dostáváme pravděpodobnost

$$1 - \frac{\pi}{\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}} \doteq 0{,}179.$$



Případ s nejkratší stranou AB vede na neomezenou oblast pro možné polohy C.

Jiný způsob, jak chápat náhodné rozmístění tří bodů v rovině, spočívá v tom, že si zvolíme kruh (dostatečně velký) a v něm rovnoměrně náhodně tři body. Dá se ukázat, že pravděpodobnost, že vznikne ostroúhlý trojúhelník, je $4/\pi^2 - 1/8 \doteq 0{,}280$, a to bez ohledu na to, jak velký kruh jsme zvolili. Pro jiné volby omezených oblastí, ve kterých volíme náhodně tři body, obdržíme odlišné pravděpodobnosti. Například pro čtverec to je $53/150 - \pi/40 \doteq 0{,}275$.

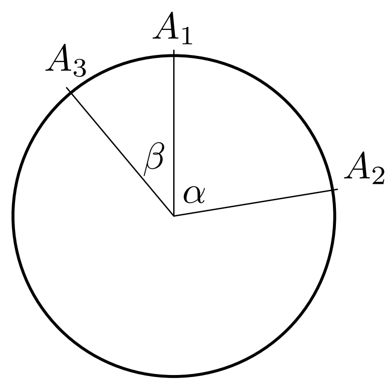
Dostáváme různé výsledky podle toho, jak jsme popsali náhodnou volbu tří bodů v rovině. Vždy nám ale vyšlo, že je pravděpodobnější obdržet tupoúhlý než ostroúhlý trojúhelník. Uveďme ještě jednu variantu, jejíž výsledek $1/4$ vychází i při některých jiných přístupech.

Problém tří bodů na kružnici

Zadání: Na kružnici zvolíme rovnoměrně náhodně tři body. Jaká je pravděpodobnost, že tvoří ostroúhlý trojúhelník?

Řešení: Označme zvolené body A_1, A_2 a A_3. Podle Thaletovy věty je trojúhelník $A_1A_2A_3$ pravoúhlý jen, když dva z těchto bodů leží na průměru kružnice, což má nulovou pravděpodobnost. Nechť C_k značí jev, že na půlkružnici začínající v A_k leží ve směru hodinových ručiček oba zbývající vrcholy. Všimněme si, že $P(C_k) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$, protože oba vrcholy mají pravděpodobnost $1/2$, že budou v dané půlkružnici. Evidentně může nastat nanejvýš jeden z jevů C_1, C_2 a C_3. Přitom pokud nastane jeden z nich, tak je trojúhelník tupoúhlý. Odtud vidíme, že pravděpodobnost obdržení tupoúhlého trojúhelníku je $P(C_1 \cup C_2 \cup C_3) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) = 3/4$. Výsledný trojúhelník bude ostroúhlý s pravděpodobností $1/4$.

Jiná možnost je zafixovat jeden vrchol a označit délky oblouků ke zbylým vrcholům jako α a β (viz obrázek).



Tyto délky musí splňovat $0 \leq \alpha + \beta \leq 2\pi$ (předpokládáme jednotkovou kružnici). Ostroúhlý trojúhelník vznikne, jestliže $\alpha < \pi$, $\beta < \pi$ a $\alpha + \beta > \pi$. To opět vede na pravděpodobnost $1/4$ (viz obrázek).