NMFM310, téma 6: Poissonův proces

Příklad 1:

Ukažte, že exponenciální rozdělení je rozdělení bez paměti, tj. že pro náhodnou veličinu Y s exponenciálním rozdělením platí

$$\mathbb{P}(Y > s + h | Y > s) = \mathbb{P}(Y > h).$$

Příklad 2:

Ukažte, že součet k nezávislých náhodných veličin s exponenciálním rozdělením s parametrem λ, tedy s hustotou $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$, má Erlangovo (gamma) rozdělení s parametry λ a k, tedy s hustotou

$$g_k(x) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

Příklad 3:

Ověřte, že pro Poissonův proces $\{N(t), t \geq 0\}$ platí následující rovnosti:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N(t+h) = k+1 \,|N(t) = k) = \lambda h + o(h),\\
&\mathbb{P}(N(t+h) = k \,|N(t) = k) = 1 - \lambda h + o(h),\\
&\mathbb{P}(N(t+h) > k+1 \,|N(t) = k) = o(h),
\end{aligned}$$

kde pro funkci $o(h)$ platí $\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

Příklad 4:

Máte Poissonův proces $\{N(t), t \geq 0\}$ s intenzitou $\lambda = 1$. Jaká je pravděpodobnost, že v časovém intervalu $[0, 4]$ nenastala žádná událost a zároveň v časovém intervalu $[2, 5]$ nastaly alespoň dvě události?

Simulace Poissonova procesu

Ověřte, že následující algoritmus generuje Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$ na intervalu $[0, T]$.

Krok 1: Generujme hodnotu náhodné veličiny S, která má Poissonovo rozdělení s parametrem λT. Toto bude celkový počet událostí na intervalu $[0, T]$.
Krok 2: Vygenerujme celkem S nezávislých náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, T]$. Setřiďme je do neklesající posloupnosti a tuto neklesající posloupnost vezměme za časy událostí. Poissonovův proces je pak odpovídající čítací proces.