

## Cvičení NMF310 8.4.2015

**Příklad 1:** Leze slimák po nekonečně vysokém stromě, za každou hodinu s pravděpodobností  $\frac{1}{4}$  vyleze nahoru o jeden centimetr a s pravděpodobností  $\frac{3}{4}$  o jeden centimetr dolů sklouzne. Pokud je na zemi, popoleze o jeden centimetr nahoru s pravděpodobností 1. Označme  $X_n$  výšku (v centimetrech), ve které se slimák nachází po  $n$  hodinách.

- Určete matici pravděpodobností přechodu.
- Klasifikujte stavy řetězce.
- Předpokládejte, že na počátku je slimák na zemi, a spočítejte absolutní pravděpodobnosti po třech hodinách
- Spočítejte stacionární rozdělení (pokud existuje).

**Návod:** (Homogenní lineární diferenční rovnice )

Jak na ně: Homogenní lineární diferenční rovnici  $k$ -tého řádu nazveme rovnicí

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k} = 0, \quad n \geq k, \quad (1)$$

kde  $c_i$  jsou dané koeficienty a  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  je posloupnost, kterou hledáme. Rovnici

$$\lambda^k + c_1 \lambda^{k-1} + \dots + c_{k-1} \lambda + c_k = 0, \quad (2)$$

nazveme charakteristickou rovnicí homogenní lineární diferenční rovnice (1). Jestliže číslo  $\lambda$  je  $r$ -násobným kořenem rovnice (2), pak posloupnosti  $\{\lambda^n\}_{n=0}^\infty$ ,  $\{n\lambda^n\}_{n=0}^\infty$ ,  $\dots$ ,  $\{n^{r-1}\lambda^n\}_{n=0}^\infty$  jsou lineárně nezávislá řešení homogenní lineární diferenční rovnice (1). Každé řešení homogenní lineární diferenční rovnice (1) je pak kombinací těchto řešení.

Z  $k$  počátečních podmínek  $a_l = \text{const}_l$ ,  $l \in \{1, \dots, k\}$  a z normovací podmínky pro pravděpodobnostní rozdělení  $\sum_{n=0}^\infty a_n = 1$ , pak můžeme určit jednoznačné řešení.

**Příklad 2:** Řešte soustavy diferenčních rovnic:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \pi_0 &= 2 \\ \pi_1 &= \frac{4}{3} \\ \frac{1}{4}\pi_k + \frac{3}{4}\pi_{k+2} &= \pi_{k+1}, \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{3}{4}\pi_1 &= \pi_0 \\ \pi_0 + \frac{3}{4}\pi_2 &= \pi_1 \\ \frac{1}{4}\pi_k + \frac{3}{4}\pi_{k+2} &= \pi_{k+1}, \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

**Příklad 3:** Řešte soustavy diferenčních rovnic:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \pi_0 &= 1 \\ \pi_1 &= 3 \\ \frac{1}{2}\pi_k + \frac{1}{2}\pi_{k+2} &= \pi_{k+1}, \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{1}{2}\pi_1 &= \pi_0 \\ \pi_0 + \frac{1}{4}\pi_2 &= \pi_1 \\ \frac{1}{2}\pi_k + \frac{1}{2}\pi_{k+2} &= \pi_{k+1}, \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

**Příklad 4:** Řešte soustavy diferenčních rovnic:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \pi_0 &= 3 \\ \pi_1 &= \frac{5}{3} \\ \frac{3}{4}\pi_k + \frac{1}{4}\pi_{k+2} &= \pi_{k+1}, \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{1}{4}\pi_1 &= \pi_0 \\ \pi_0 + \frac{1}{4}\pi_2 &= \pi_1 \\ \frac{3}{4}\pi_k + \frac{1}{4}\pi_{k+2} &= \pi_{k+1}, \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

## Domácí úloha - odevzdání 19.4.

### Simulování systému bonus-malus

a) Uvažujme verzi systému bonus-malus, který jsme pojmenovali britský systém. Takže předpokládáme, že počet pojistných událostí u každého klienta v daném roce má Poissonovo rozdělení s parametrem  $\lambda$ , a matice pravděpodobností přechodu mezi sedmi kategoriemi pak je rovna

$$P = \begin{pmatrix} e^{-\lambda} & 0 & 0 & \lambda e^{-\lambda} & 0 & \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} & 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}) \\ e^{-\lambda} & 0 & 0 & \lambda e^{-\lambda} & 0 & \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} & 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}) \\ 0 & e^{-\lambda} & 0 & 0 & \lambda e^{-\lambda} & 0 & 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda) \\ 0 & 0 & e^{-\lambda} & 0 & \lambda e^{-\lambda} & 0 & 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda) \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda} & 0 & \lambda e^{-\lambda} & 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda} & 0 & 1 - e^{-\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda} & 1 - e^{-\lambda} \end{pmatrix}.$$

Spočtete stacionární rozdělení  $\pi$  pro případ  $\lambda = \frac{1}{10}$ .

Generujte sedm náhodných realizací řetězce délky 10000 s maticí pravděpodobností přechodu  $P$ , pro  $\lambda = \frac{1}{5}$ , ze sedmi počátečních stavů  $1, 2, \dots, 7$ .

Pro každý generovaný řetězec spočtete empirické četnosti  $N_i(10000)/10000$  stavů  $i = 1$  až  $7$ . Porovnejte (možno i graficky) obdržené empirické četnosti pro různé počáteční stavy se stacionárním rozdělením  $\pi$ .

Generujte 2000 počátečních stavů podle rozdělení  $\pi$  a z nich generujte průběhy Markovského řetězce jako výše, ale jenom do času 10. Spočítejte četnosti stavů  $1$  až  $7$  v generované populaci pro časy  $t = 0, 1, 2, \dots, 10$ . Porovnejte, jak závisí tyto empirické četnosti na čase (opět možno graficky).

Generujte 2000 průběhů řetězce do času 10, ale nyní mějte všechny z počátečního stavu  $6$ . Stejně jako v předchozím případě spočtete četnosti stavů  $1$  až  $7$  v generované populaci pro časy  $t = 0, 1, 2, \dots, 10$ . Porovnejte, jak závisí tyto empirické četnosti na čase (opět možno graficky).

Pro obě simulace (s počátečním stavem  $6$  a s počátečním rozdělením náhodným rovným  $\pi$ ) vývoje populace 2000 pojištěnců spočtete celkové vybrané pojistné (samozřejmě relativně k základu 100%) v časech  $t = 1, 2, \dots, 10$ . Nakreslete srovnávací graf pro obě populace. Komentujte, proč graf vypadá právě takto.

b) Simulujte 10 let pojistných událostí pro populaci pojištěnců velikosti 2000. Předpokládejte, že počet škod každého pojištěnce se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem  $\lambda = \frac{1}{5}$  a velikost škod (vyjádřených v poměru k základu pojistného) jsou vzájemně nezávislé s lognormálním rozdělením s parametry

(i)  $\mu = -0.366$  a  $\sigma^2 = 2$ ,

(ii)  $\mu = 0.327$  a  $\sigma^2 = 2$ .

Uvědomte si, že volby parametrů odpovídají střední hodnotě jednotlivé škody rovné cca 1.885 a 3.77 (neboť střední hodnota log-normálního rozdělení je rovna  $\exp(\mu + \sigma^2/2)$ ), tedy střední hodnotě pojistného vybraného od jednoho pojištěnce krát  $\frac{5}{2}$  respektive krát  $5 = \lambda$ .

Nakreslete graf celkového vybraného pojistného pro případ počátečního rozdělení rovného stacionárnímu (máte z a)) a celkových škod v daných dvanácti letech pro případ (i) a (ii). Můžete nakreslit i kumulativní (přes prvních  $t$  let) rozdíly mezi celkovým pojistným a celkovými škodami. Komentujte.