

Cvičení NFM310 1.4.2015

Příklad 1: Nechť homogenní Markovův řetězec má matici pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

- Klasifikujte stavy řetězce.
- Určete stacionární rozdělení (pokud existuje).
- Určete limitní rozdělení (pokud existuje).

Příklad 2: Nechť homogenní Markovův řetězec má matici pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

- Klasifikujte stavy řetězce.
- Určete stacionární rozdělení (pokud existuje).
- Určete limitní rozdělení (pokud existuje).

Příklad 3: Nechť homogenní Markovův řetězec má matici pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

- Spočtěte matici pravděpodobností přechodu po dvou krocích $\mathbf{P}^{(2)}$.
- Předpokládejme, že počáteční rozdělení je rovnoměrné. Jaké je rozdělení v čase $n = 2$?
- Předpokládejme, že počáteční rozdělení $p = (1, 0, 0, 0)$. Jaké je rozdělení v čase $n = 2$?
- Klasifikujte stavy řetězce.
- Určete stacionární rozdělení (pokud existuje).

Příklad 4: Mějme tři přihrádky, do kterých umisťujeme kuličky (každá přihrádka může obsahovat maximálně jednu kuličku). V každém časovém okamžiku vybereme rovnoměrně náhodně jednu z přihrádek. Pokud není obsazena, vložíme do ní kuličku. Pokud je obsazena s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ z ní kuličku odebereme a s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ kuličku ponecháme. Označme X_n počet obsazených přihrádek v čase n .

- Určete matici pravděpodobností přechodu.
- Klasifikujte stavy řetězce.
- Předpokládejte, že počáteční rozdělení je rovnoměrné (každý stav má stejnou pravděpodobnost) a spočtěte absolutní pravděpodobnosti po jednom kroku.
- Spočtěte stacionární rozdělení (pokud existuje).
- Určete limitní rozdělení (pokud existuje).