Cvičení z teorie pravděpodobnosti 1

12. konvergence v distribuci (k normálnímu rozdělení)

1. ověření Ljapunovovy podmínky pro CLV
2. přímý výpočet charakteristické funkce a limitní přechod

---

1. Nechť $X_n \sim R(-n, n), n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé reálné náhodné veličiny. Ukažte, že normovaný součet
$$\frac{3\sqrt{n}}{n^3} \sum_{k=1}^{n} X_{2k} X_{2k-1}$$
konverguje v distribuci a zjistěte jeho limitu.
2. Nechť $X_n, n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé n.v. s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $EX_n = n$. Ukažte, že normovaný součet
$$\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - k)$$
konverguje v distribuci a zjistěte jeho limitu.
3. Nechť $X_n, n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé n.v. s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $EX_n = \sqrt{n}$. Ukažte, že normovaný součet
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \sqrt{k})$$
konverguje v distribuci a zjistěte jeho limitu.
4. Nechť $X_n, n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé n.v. s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $EX_n = n^2$. Ukažte, že normovaný součet
$$\frac{1}{n^2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - k^2)$$
konverguje v distribuci a zjistěte jeho limitu.
5. Nechť $X_n \sim R(-n, n), n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé reálné náhodné veličiny. Ukažte, že normovaný součet
$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} X_k$$
konverguje v distribuci a zjistěte jeho limitu.
6. Nechť $X_n \sim R(-\sqrt{n}, \sqrt{n}), n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé reálné náhodné veličiny. Ukažte, že normovaný součet
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$
konverguje v distribuci a zjistěte jeho limitu.
7. Nechť $X_n, n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé reálné náhodné veličiny s hustotou $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Ukažte, že normovaný součet
$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k X_k$$
konverguje v distribuci a zjistěte jeho limitu.
8. Nechť $X_n \sim N(-n, n), n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé reálné náhodné veličiny. Ukažte, že normovaný součet
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k + k)$$
konverguje v distribuci a zjistěte jeho limitu.
9. Nechť $X_n \sim Po(n), n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé reálné náhodné veličiny. Ukažte, že normovaný součet
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - k)$$
konverguje v distribuci a zjistěte jeho limitu.

Nechť $Y_{n,1}, \dots Y_{n,k_n} \in \mathbb{L}_2$ jsou nezávislé, kdykoli $n \in \mathbb{N}$. Označme $X_{n,k} = Y_{n,k} - EY_{n,k} \in \mathbb{L}_2$,
$$Z_n = \sum_{k=1}^{k_n} Y_{n,k}, \qquad a_n = EZ_n, \qquad v_n(d) = \sum_{k=1}^{k_n} E|X_{n,k}|^d.$$

1. Pokud $v_n(2) \to 1$ a $v_n(2+\delta) \to 0$ pro $n \to \infty$ a nějaké $\delta > 0$, pak $Z_n - a_n \to N(0,1)$ v distribuci.
2. Pokud $v_n(2) \sim \sigma^2 b_n^2 > 0$ a $\exists\, \delta > 0$ takové, že $v_n(2+\delta) = o(b_n^{2+\delta})$, pak $\frac{Z_n - a_n}{b_n} \to N(0, \sigma^2)$ v distribuci.
3. Pokud $v_n(2) \to 0$ pro $n \to \infty$, pak $Z_n - a_n \to 0$ v pravděpodobnosti (i v $\mathbb{L}_2$), a tedy také v distribuci.