Cvičení z teorie pravděpodobnosti 1

11. rozpoznání charakteristické funkce, určení (typu) rozdělení

1. rozpoznání, že funkce nesplňuje základní vlastnosti charakteristické funkce
2. rozpoznání, že funkce je charakteristickou funkcí známého rozdělení
3. rozpoznání charakteristické funkce složeného, smíšeného rozdělění, konvoluce
4. rozpoznání nesrovnalosti ohledně konečnosti sudých momentů případného rozdělení
5. rozpoznání nesrovnalosti ohledně otázky řešetovitosti případného rozdělení

Rozhodněte, zda jsou následující funkce charakteristickými funkcemi nějaké reálné náhodné veličiny a v rámci možností přibližte odpovídající rozdělení

1. $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f_2(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$, $f_3(x) = \sin x$, $f_4(x) = \cos x$, $f_5(x) = \sin x + \cos x$
2. $f_1(x) = e^{-x}$, $f_2(x) = e^{-|x|}$, $f_3(x) = e^{-x^2}$, $f_4(x) = \cos(x^2)$, $f_5(x) = \frac{1+|x|}{1+x^2} - \frac{11}{10}|\sin x|$
3. $f_1(x) = |\sin x|$, $f_2(x) = \cos^2(x)$, $f_3(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, $f_4(x) = \frac{\cos(x)}{1+x^2}$, $f_5(x) = \frac{1+\cos(x)}{2}$
4. $f_1(x) = \frac{1}{2-e^{-|x|}}$, $f_2(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$, $f_3(x) = e^{\sin(x)-\frac{x^2}{4}}$, $f_4(x) = e^{\cos(x)-1}$, $f_5(x) = e^{ix-|x|-x^2}$
5. $f_1(x) = |\cos(x)|$, $f_2(x) = \frac{e^{-|x|}}{1+x^2}$, $f_3(x) = \min\{1, e^{-x}\}$, $f_4(x) = \max\{e^{-x^2}, e^{-|x|}\}$
6. $f_1(x) = \max\{0, 1-|x|\}$, $f_2(x) = \cos(x) + i\sin(x)$, $f_3(x) = \cos(x) + i\sin^2(x)$, $f_4(x) = e^{\frac{\cos(x)}{2-\cos(x)}-1}$
7. $f_1(x) = \cos(\ln(1+|x|))$, $f_2(x) = \max\{\cos(x), \sin(x)\}$, $f_3(x) = \exp\{2(\frac{1}{1+x^2}) - 3|x| - \frac{1}{2}|x|^2\}$
8. $f_1(t) = \frac{1}{3}e^{-it+t^2/3} + \frac{2}{3}e^{-|t|}\cos(t)$, $f_2(t) = (1-|t|^3)^+$, $f_3(t) = \frac{(1-|t|)^+}{1+t^2}\frac{\sin t}{t}$, $f_5(t) = \frac{e^{-|t|}}{2-\frac{e^{it}}{2-e^{-it}}}$
9. $f_1(t) = \frac{1}{3-\cos(t)} + \frac{1}{3}$, $f_2(t) = \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\cos(t^2)$, $f_3(t) = \min\{e^{2t}, e^{-3t}\}$, $f_4(t) = \min\{e^{-t}, e^{t}\}$

- Je-li $X \in \mathbb{L}$, pak $\Re\hat{P}_X(t)$ je sudá funkce, $\Im\hat{P}_X(t)$ je lichá funkce, $\hat{P}_X(t)$ je stejnoměrně spojitá,
$$\hat{P}_X(0) = 1, \quad |\hat{P}_X(t)| \le 1, \quad \hat{P}_{a+bX}(t) = e^{ita}\hat{P}_X(tb).$$
- tabulka rozdělení sestavená z výsledků předchozího cvičení

rozdělení	hustota	ch.f.	poznámka
$R\{-1,1\}$	$\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$	$\cos(t)$	řešet.rozd. s max. krokem 2
$R(-1,1)$	$\frac{1}{2}\cdot 1_{(-1,1)}$	$\frac{\sin(t)}{t}$	nespojitá hustota, neintegrovatelná ch.f.
Exp(1)	$e^{-x}\cdot 1_{[x>0]}$	$\frac{1}{1-it}$	nespojitá hustota, neintegrovatelná ch.f.
Dvoj.Exp	$\frac{1}{2}e^{-\lvert x\rvert}$	$\frac{1}{1+t^2}$	integrovatelná nezáporná ch.f.
Cauchy	$\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$	$e^{-\lvert t\rvert}$	integrovatelná nezáporná ch.f.
$N(0,1)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$	$e^{-t^2/2}$	integrovatelná nezáporná ch.f.
Trohúhel.	$(1-\lvert x\rvert)^+$	$2\frac{1-\cos(t)}{t^2}$	integrovatelná nezáporná ch.f.
?	$?\cdot\frac{1-\cos(t)}{t^2}$	$(1-\lvert t\rvert)^+$	integrovatelná nezáporná ch.f.

- Jsou-li $X, Y \in \mathbb{L}_1$ nezávislé, pak $\hat{P}_{X+Y}(t) = \hat{P}_X(t)\hat{P}_Y(t)$.
- Je-li $Y : \Omega \to \mathbb{N}_0$ nezávislá s $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$, pak $\hat{P}_Z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y=n)\hat{P}_{X_n}(t)$, kde $Z = X_Y$.
- Je-li $N : \Omega \to \mathbb{N}_0$ nezáv. s iid $(X_n, n \in \mathbb{N})$, pak $\hat{P}_S(t) = A_N(\hat{P}_X(t))$, kde $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$, $A_N(s) = Es^N$.

rozdělení	pravděpodobnost	vytvoř.fce	poznámka
Poissonovo	$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	$Es^X = e^{\lambda(s-1)}$	rozvoj exponenc.
Geometrické	$P(X=k) = pq^k$	$Es^X = \frac{p}{1-qs}, \lvert s\rvert < \frac{1}{q}$	geometrická řada

- Je-li $X \in \mathbb{L}$, a $|\hat{P}_X(t_0)| = 1$ pro $t_0 > 0$, pak $|\hat{P}_X(t)|$ je t_0-periodická funkce.
- Je-li $X \in \mathbb{L}$ a $\hat{P}_X^{(2k)}(0) \in \mathbb{R}$, pak $X \in \mathbb{L}_{2k}$, a tedy $\hat{P}_X(t) \in C^{2k}(\mathbb{R})$ platí pro $k \in \mathbb{N}$.