Cvičení z teorie pravděpodobnosti 1

9. Konvergence náhodných veličin (sčítatelnost a SZVČ)

1. ověření sčítatelnosti sj., v P a v $\mathbb{L}_2$ řady nezávislých centrovaných reálných náhodných veličin
2. ověření sčítatelnosti sj., v P a v $\mathbb{L}_2$ řady nezávislých veličin z $\mathbb{L}_1$
3. ověření předpokladů SZVČ pro centrované nezávislé veličiny
4. ověření předpokladů SZVČ pro nezávislé veličiny z $\mathbb{L}_1$

---

1. Nechť $X_k \sim R(-\sqrt{k}, \sqrt{k})$ jsou nezávislé. Rozhodněte, zda je následující řada sčítatelná skoro jistě
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}}{k(k+2)} X_k.$$

2. Nechť $X_k, k \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením $R(-k^{3/2}, k^{3/2})$. Rozhodněte o sčítatelnosti skoro jistě následující řady
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-5/2} X_k. \tag{1}$$

3. Nechť $X_k, k \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením $N(0, k^2)$. Rozhodněte o sčítatelnosti skoro jistě řady (1).

4. Buďte X_k nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením $R(0, k)$.
   (a) Rozhodněte, zda je následující řada konvergentní skoro jistě
   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k^3}{k^5}$$
   (b) Rozhodněte, zda následující posloupnost konverguje skoro jistě. Pokud ano, spočtěte příslušnou limitu
   $$Y_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k^3}{k^2}$$

5. Nechť $X_k, k \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením $N(0, k^2)$. Rozhodněte o konvergenci skoro jistě následující posloupnosti a určete její limitu
$$Y_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} X_k^2.$$

6. Buďte X_k nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $n^{3/2}$.
   (a) Rozhodněte, zda náhodné řada konverguje skoro jistě
   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k^2}{k^5}.$$
   (b) Rozhodněte, zda následující posloupnost konverguje skoro jistě. Pokud ano, spočtěte příslušnou limitu
   $$Y_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k^2}{k^2}.$$

7. Vyřešte příklad 4. se změněným zadáním, kde $X_k \sim R(-k/2, k)$ má rovnoměrné rozdělení.

- Nechť $X_k \in \mathbb{L}_2$ jsou nezávislé veličiny. Řada $\sum_k (X_k - EX_k)$ je sčítatelná v $\mathbb{L}_2$ právě tehdy, když $\sum_k \mathrm{var}(X_k) < \infty$, a pak je tedy sčítatelná v i pravděpodobnosti a také skoro jistě (i v $\mathbb{L}_1$).
- Pokud $X_k \geq 0, k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_k X_k$ je sčítatelná v $\mathbb{L}_1$, skoro jistě právě tedy, když $\sum_k EX_k < \infty$.
- Pokud $X_k \in \mathbb{L}_2$ jsou nezávislé veličiny s $\sum_k \mathrm{var}(X_k) < \infty$ a $\sum_k EX_k$ konverguje, pak $\sum_k X_k$ je řada sčítatelná v $\mathbb{L}_2$, v $\mathbb{L}_1$, v pravděpodobnosti a skoro jistě.
- Nechť $0 < b_n \uparrow \infty$ a nechť $Z_n \in \mathbb{L}_2$ jsou nezávislé veličiny. Pak

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{var}(Z_k)}{b_k^2} < \infty \quad \Rightarrow \quad b_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} (Z_k - EZ_k) \xrightarrow{\text{sj}} 0$$

pro $n \to \infty$.

- **Stolzova věta** Nechť $0 < b_n \uparrow \infty$ a a_n jsou posloupnosti reálných čísel takových, že existuje limita

$$L = \lim_{n\to\infty} \tfrac{\Delta a_n}{\Delta b_n} \in \bar{\mathbb{R}},$$

kde $\Delta a_n = a_n - a_{n-1}$ a $\Delta b_n = b_n - b_{n-1}$, pak existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{a_n}{b_n} = L \in \bar{\mathbb{R}}.$$

Důkaz: Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí

$$L - \varepsilon \leq \tfrac{\Delta a_n}{\Delta b_n} \leq L + \varepsilon.$$

Vynásobením této nerovnosti kladným číslem $\Delta b_n > 0$ pro $n \geq n_0$ dostáváme nerovnost

$$(L - \varepsilon) \leq \Delta a_n \leq (L + \varepsilon)\Delta b_n.$$

Sečtením několika takových rovností obdržíme nerovnost

$$(L-\varepsilon) \sum_{k=n_0}^{n} \Delta b_k \leq \sum_{k=n_0}^{n} \Delta a_k \leq (L+\varepsilon) \sum_{k=n_0}^{n} \Delta b_n.$$

Podělením této nerovnosti hodnotou b_n obdržíme odhad

$$(L-\varepsilon)(1 - \tfrac{b_{n_0-1}}{b_n}) \leq \tfrac{a_n - a_{n_0-1}}{b_n} \leq (L+\varepsilon)(1 + \tfrac{b_{n_0-1}}{b_n}).$$

Limitním přechodem $n \to \infty$ obdržíme pro každé $\varepsilon > 0$ nerovnost nezávislou na hodnotě n_0 ve tvaru

$$L - \varepsilon \leq \liminf_{n\to\infty} \tfrac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \tfrac{a_n}{b_n} \leq L + \varepsilon.$$

$\mathcal{Q.E.D}$.

- Nechť $S_n, S \in \mathbb{L}_2$, pak

$$S_n \xrightarrow{\mathbb{L}_2} S \quad \Rightarrow \quad S_n \xrightarrow{\mathbb{L}_1} S \quad \Rightarrow \quad S_n \xrightarrow{P} S.$$

- Nechť $S_n \in \mathbb{L}$, pak

$$S_n \xrightarrow{\text{sj}} S \quad \Rightarrow \quad S_n \xrightarrow{P} S.$$

- Pokud $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, kde $X_k \in \mathbb{L}, k \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé veličiny, pak

$$S_n \xrightarrow{\text{sj}} S \quad \equiv \quad S_n \xrightarrow{P} S.$$