Cvičení z teorie pravděpodobnosti 1

8. podmíněná střední hodnota spojená s transformací

1. nepřímý výpočet podmíněné střední hodnoty při podmiňování spojitou regulárně závislou veličinou
2. podmiňování veličinou s rozdělěním, které je směsí diskrétního a spojitého
3. podmíněná hustota (vzhledem k součinu σ-konečných měr), podmíněné rozdělení

---

1. Nechť X, Y jsou nezávislé n.v. s hustotou $f(x) = e^{-x} 1_{[x>0]}$. Spočtěte $E[e^{-X}|X+Y]$.
2. Nechť X, Y jsou nezávislé n.v. s hustotou $f(x) = e^{-x} 1_{[x>0]}$. Spočtěte $E[X||X-Y|], E[X^2||X-Y|]$.
3. Nechť X, Y jsou nezávislé n.v. s hustotou $f(x) = e^{-x} 1_{[x>0]}$. Spočtěte $E[X||X-Y| \wedge 1]$.
4. Nechť náhodná veličina Y má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0,1)$ a náhodná veličina X má za podmínky $Y = y$ geometrické rozdělení s parametrem y, tedy $P[X = k|Y = y] = y(1-y)^k, k \in \mathbb{N}_0$. Najděte
   (a) rozdělení n.v. X,
   (b) podmíněné rozdělení $P_{Y|X}$.
5. Nechť n.v. Z má Poissonovo rozdělení s náhodným parametrem U, přitom U má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 1. Najděte rozdělení (nepodmíněné) n.v. Z a spočtěte $E[U|Z = k]$.

- Nechť $X \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $Y, Z : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E})$. Nechť $Y = Z$ platí na množině $[Y \in B] = [Z \in C]$, kde $B, C \in \mathcal{E}$. Pak skoro jistě platí

$$E[X|Y] \cdot 1_{[Y \in B]} = E[X|Z] \cdot 1_{[Z \in C]}.$$

- Nechť X, Y mají sdruženou hustotu $f_{X,Y}$. Označme $f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x, y)\,\mathrm{d}x$. Pak

$$E[G(X,Y)|Y = y] = \frac{\int G(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x}{f_Y(y)} \quad \text{platí pro } P_Y\text{-sv. } y.$$

- Nechť $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (S, \mathcal{S}, P_X)$ a $Y : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (E, \mathcal{E}, P_Y)$. Je-li $0 \le f_{X,Y} = \frac{\mathrm{d}P_{X,Y}}{\mathrm{d}(\mu \otimes \nu)}$ na $\mathcal{S} \otimes \mathcal{E}$, což přehledněji můžeme zapisovat v diferenciální podobě následujícím způsobem

$$\mathrm{d}P_{X,Y} = f_{X,Y}\ \mathrm{d}(\mu \otimes \nu) \quad \text{na} \quad \mathcal{S} \otimes \mathcal{E},$$

  kde μ, ν jsou σ-konečné míry po řadě na následujících měřitelných prostorech $(S, \mathcal{S})$ a $(E, \mathcal{E})$. Pak P_Y má hustotu f_Y vzhledem k ν, tj. $\mathrm{d}P_Y = f_Y\,\mathrm{d}\nu$ na $\mathcal{E}$, ve tvaru

$$f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x) \cdot 1_{[\int f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x) < \infty]}$$

  a podmíněnou hustotu X za podmínky Y vzhledem k $\mu \otimes \nu$ dostaneme ze vzorce

$$f_{X|Y}(x,y) = \tfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \cdot 1_{[f_Y(y)>0]}.$$

  Podmíněné rozdělení X za podmínky Y pak dostaneme např. volbou

$$\zeta(B,y) = \textstyle\int_B f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}\mu(x) \cdot 1_{[f_Y(y)>0]} + P_X(B) \cdot 1_{[f_Y(y)=0]}$$