**Cvičení z teorie pravděpodobnosti 1**

7. podmíněná střední hodnota spojená s transformací

1. nepřímý výpočet podmíněné střední hodnoty při podmiňování spojitou regulárně závislou veličinou

---

1. Nechť $X, Y \sim R(0,1)$ jsou nezávislé. Spočtěte $E[X^2|X-Y]$.
2. Nechť $X, Y \sim R(0,1)$ jsou nezávislé. Spočtěte $E[(X-Y)^2|XY]$.
3. Nechť $X, Y \sim N(0,1)$ jsou nezávislé. Spočtěte $E[|X||X^2+Y^2]$.
4. Nechť $X, Y \sim N(0,1)$ jsou nezávislé. Spočtěte $E[|X||X/Y]$.

---

- Nechť $X, Y$ mají sdruženou hustotu $f_{X,Y}$. Označme $f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x$. Pak

$$E[G(X,Y)|Y=y] = \frac{\int G(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x}{f_Y(y)} \quad \text{platí pro } P_Y\text{-sv. } y.$$

---

Nechť $X, Y$ jsou reálné náhodné veličiny, přičemž $Y$ má hustotu $f_Y$ a $X \in \mathbb{L}_1$, pak existuje borelovská integrovatelná funkce $h_{X|Y}$ taková, že

1. $H_{X|Y}(y) := E[X 1_{[Y<y]}] = \int_{[Y<y]} X\,\mathrm{d}P = \int_{-\infty}^{y} h_{X|Y}(z)\,\mathrm{d}z$
2. $E[X|Y=y] = \frac{h_{X|Y}(y)}{f_Y(y)}$ platí pro $P_Y$-skoro všechna $y \in \mathbb{R}$.

Pak lze přímo počítat pro $P_Y$-sv. $y \in \mathbb{R}$

$$E[X|Y=y] = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} E[X 1_{[Y<y]}]}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(Y<y)},$$

kde $f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(Y<y)$ je hustota r.v.n. $Y$ počítaná derivováním absolutně spojité distribuční funkce $F_Y(y)$ a podobně funkci $h_{X|Y}$ počítáme derivováním funkce $H_{X|Y}$, která je absolutně spojitá "distribuční funkce" znaménkové míry

$$\nu(B) = \int_{[Y \in B]} X\,\mathrm{d}P.$$

**Důkaz:** Označme $h(y) = E[X|Y=y]$, pak $h(Y) \in \mathbb{E}[X|Y]$, a tedy

$$H_{X|Y}(y) = \int_{[Y<y]} X\,\mathrm{d}P = \int_{[Y<y]} h(Y)\,\mathrm{d}P = \int_{(-\infty,y)} h(y)\,\mathrm{d}P_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} h(y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

Protože

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(y) f_Y(y)|\,\mathrm{d}y = \int |h(Y)|\,\mathrm{d}P = E|E[X|Y]| \le E|X| < \infty,$$

je funkce $h(y)f_Y(y)$ integrovatelná, a tím pádem dostáváme, že funkce $H_{X|Y}$ je absolutně spojitá. Má tedy skoro všude derivaci, která je skoro všude rovna $h(y)f_Y(y)$. Protože $f_Y(y) > 0$ platí $P_Y$-skoro všude, dostaneme, že

$$E[X|Y=y] = h(y) = \frac{H'_{X,Y}(y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} E[X 1_{[Y<y]}]}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(Y<y)} \quad \text{platí} \quad P_Y\text{-sv.},$$

neboť $F_Y(y) = P(Y<y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(z)\,\mathrm{d}z$ je absolutně spojitá funkce, a tedy $F'_Y(y) = f_Y(y)$ platí pro skoro všechna $y \in \mathbb{R}$, tím spíše pro $P_Y$-skoro všechna $y \in \mathbb{R}$. $\mathbb{Q.E.D.}$