Cvičení z teorie pravděpodobnosti 1

6. podmíněná střední hodnota

1. základní vlastnosti podmíněné střední hodnoty
2. podmíněná střední hodnota veličinou nabývající spočetně mnoha hodnot
3. podmíněná střední hodnota veličinou s rozdělením, které je směsí diskrétního a spojitého rozdělení
4. přímý výpočet podmíněné střední hodnoty při podmiňování regulárně závislou veličinou
5. nepřímý výpočet podmíněné střední hodnoty při podmiňování spojitou regulárně závislou veličinou

---

1. Nechť $X, Y \sim R(0, 2\pi)$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Spočtěte $E[\sin(X+Y)|X]$.
2. Nechť $X \sim R(0,1)$. Označme $Y = \lfloor nX \rfloor$. Spočtěte $E[X|Y]$.
3. Nechť X má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 1. Spočtěte $E[X|1_{[X>x]}]$ pro $x > 0$.
4. Nechť X má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 1. Spočtěte $E[X|X \wedge 1]$.
5. Nechť X, Y jsou nezávislé n.v. s hustotou $f(x) = e^{-x} 1_{[x>0]}$. Spočtěte $E[(X+Y)^2|X \wedge 1]$.
6. Nechť veličiny $X \sim R(5, 25)$ a $Y \sim R(-1, 1)$ jsou nezávislé. Spočtěte$E[\exp\{\frac{1}{2}XY\}|X]$.
7. Nechť $X \sim R(0,1)$ a $Y \sim \text{Poiss}(1)$ jsou nezávislé. Spočtěte $E[|X-Y||Y^3]$.
8. Nechť $(X,Y)^\intercal$ má rovnoměrné rozdělení na $\{x^2+y^2<1\}$. Spočtěte $E[X|Y]$.
9. Nechť $(X,Y)^\intercal$ má rovnoměrné rozdělení na $\{x^2+y^2<1\}$. Spočtěte $E[X^2+Y^2|Y^5]$.
10. Nechť $(X,Y)^\intercal$ má rovnoměrné rozdělení na $\{x^2+y^2<1\}$. Spočtěte $E[|Y||X^2+Y^2]$.

- Pro $X, Y \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a náhodnou veličinu $Z : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E})$ platí:
  1. $a, b, c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad E[aX + bY + c|Z] = aE[X|Z] + bE[Y|Z] + c$ skoro jistě.
  2. Je-li $\sigma(X) \subseteq \sigma(Z)$,[1] pak $E[X|Z] = X$ skoro jistě.
  3. Jsou-li veličiny X, Z nezávislé, pak $E[X|Z] = EX$ platí skoro jistě.
  4. Pro měřitelné zobrazení h platí $E[X|h(Z)] = E[E(X|Z)|h(Z)]$.
  5. $E[X|Z]$ má střední hodnotu rovnou EX.
  6. Je-li $X \geq Y$ skoro jistě, pak také $E[X|Z] \geq E[Y|Z]$ platí skoro jistě.

- Nechť $X, XY \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P), Y \in \mathbb{L}(\Omega, \mathcal{F}, P|\mathcal{F})$, kde $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ je σ-algebra. Pak $E[XY|\mathcal{F}] = YE[X|\mathcal{F}]$ platí skoro jistě.

- Nechť $X \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a nechť $Z : \Omega \to S$ je diskrétní n.v. definovaná na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, která každé hodnoty $z \in S$ nabývá s kladnou pravděpodobností, pak
$$E[X|Z] = \sum_{z \in S} E[X|Z = z] \cdot 1_{[Z=z]},$$
tj. $E[X|Z](\omega) = E[X|Z = z]$, pokud $Z(\omega) = z$.

- Nechť $X \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $Y, Z : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E})$. Nechť $Y = Z$ platí na množině $[Y \in B] = [Z \in C]$, kde $B, C \in \mathcal{E}$. Pak skoro jistě platí
$$E[X|Y] \cdot 1_{[Y \in B]} = E[X|Z] \cdot 1_{[Z \in C]}.$$

- Nechť X, Y jsou regulárně závislé náhodné veličiny s $\mathrm{d}P_{X,Y} = k_{X,Y}\, \mathrm{d}P_X \otimes P_Y$ a $G \in \mathbb{L}_1(P_{X,Y})$. Pak
$$E[G(X,Y)|Y = y] = E[G(X,y) k_{X,Y}(X,y)] \quad \text{platí pro } P_Y\text{-sv. } y.$$
Speciálně pro X, Y nezávislé platí
$$E[G(X,Y)|Y = y] = EG(X,y) \quad \text{pro } P_Y\text{-sv. } y.$$

- Nechť X, Y mají sdruženou hustotu $f_{X,Y}$. Označme $f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x,y)\, \mathrm{d}x$. Pak
$$E[G(X,Y)|Y = y] = \frac{\int G(x,y) f_{X,Y}(x,y)\, \mathrm{d}x}{f_Y(y)} \quad \text{platí pro } P_Y\text{-sv. } y.$$

[1] tj. existuje-li měřitelná $h : (E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, že $X = h(Z)$