Cvičení z teorie pravděpodobnosti 1

5. částečná transformace, elementární podmíněná stření hodnota

1. volba vhodné transformace dvojrozměrné hustoty pro výpočet hustoty související reálné n.veličiny
2. výpočet elementární podmíněné střední hodnoty
3. základní vlastnosti podmíněné střední hodnoty

---

1. Nechť $X, Y \sim N(0,1)$ jsou nezávislé veličiny, určete rozdělení náhodné veličiny $V = X + Y$.
2. Nechť $X, Y \sim R(0,1)$ jsou nezávislé veličiny, určete rozdělení náhodné veličiny $V = XY$.
3. Nechť $X \sim N(0,1)$, spočtěte $E[X|X > 0], E[X^2|X > 0]$.
4. Nechť $X \sim R(0,1)$, spočtěte $E[X|X < x], E[X^2|X < x]$ pro $x > 0$.
5. Nechť X má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 1. Pro $y > 0$ spočtěte $E[X|X > y]$.
6. Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou 1. Pro $x, y > 0$ spočtěte a. $E[(X + Y)^2|X > x]$, b. $E[(X + Y)^2|X > x, Y > y]$.
7. Nechť $X, Y \sim R(0,1)$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Spočtěte $E[(X + Y)^2|X]$.
8. Nechť X, Y jsou nezávislé n.v. s exponenciálním rozdělením s $EX = EY = 1$. Spočtěte $E[e^{-(X+Y)}|X]$.

- Pokud reálný vektor $(X, Y)^\intercal$ má hustotu $f_{X,Y}(x, y)$ a my máme určit rozdělení spojité reálné veličiny $Z = h(X, Y)$, můžeme zkusit zavést[1] veličinu $U = g(X, Y)$ takovou, že $\varphi = (h, g)^\intercal$ bude splňovat předpoklady věty o transformaci. Odtud dostanem stdruženou hustotu $f_{U,Z}(u, z)$ a hustotu n.v. Z dostaneme ze vzorce $f_Z(z) = \int f_{U,Z}(u, z)\,\mathrm{d}u$.

- Nechť $X \in \mathbb{L}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $B \in \mathcal{A}$ s $P(B) > 0$, pak $E[X|B] = \frac{E[X 1_B]}{P(B)}$.

  Náznak důkazu (korektní důkaz probíhá vývojovou metodou):

$$E[X|B] = \int X \,\mathrm{d}P_{|B} = \frac{1}{P(B)} \int X \,\mathrm{d}(P|B) = \frac{1}{P(B)} \int_B X \,\mathrm{d}P = \frac{E[X 1_B]}{P(B)}.$$

- Pro $X, Y \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a náhodnou veličinu $Z : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E})$ platí:

  1. $a, b, c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad E[aX + bY + c|Z] = aE[X|Z] + bE[Y|Z] + c$ skoro jistě.
  2. Je-li $\sigma(X) \subseteq \sigma(Z)$,[2] pak $E[X|Z] = X$ skoro jistě.
  3. Jsou-li veličiny X, Z nezávislé, pak $E[X|Z] = EX$ platí skoro jistě.
  4. Pro měřitelné zobrazení h platí $E[X|h(Z)] = E[E(X|Z)|h(Z)]$.
  5. $E[X|Z]$ má střední hodnotu rovnou EX.
  6. Je-li $X \geq 0$ skoro jistě, pak také $E[X|Z] \geq 0$ platí skoro jistě.

- Nechť $X, XY \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P), Y \in \mathbb{L}(\Omega, \mathcal{F}, P|\mathcal{F})$, kde $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ je σ-algebra. Pak $E[XY|\mathcal{F}] = YE[X|\mathcal{F}]$ platí skoro jistě.

---

[1] Transformaci volíme tak, aby byl výpočet co nejjednodušší, přičemž výsledek přirozeně nezávisí na volbě transformace. Lze tedy ten samý příklad počítat různými způsoby a zkontrolovat si, že výsledek je vždy ten samý a hlavně je vhodné zkontrolovat, že výsledná funkce je hustotou rozdělení, které lze očekávat.

[2] tj. existuje-li měřitelná $h : (E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, že $X = h(Z)$