Cvičení z teorie pravděpodobnosti 1

4. nezávislost dvou náhodných veličin, dvojrozměrná transformace hustoty

1. prostá transformace dvojrozměrné hustoty
2. neprostá transformace dvojrozměrné hustoty
3. výpočet marginální hustoty po transformaci hustoty dvourozměrného vektoru

---

1. Nechť náhodný vektor $(X,Y)^\tau$ má rovnoměrné rozdělení na kruhu $K = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$. Určete sdružené rozdělení polárních souřadnic R, Φ a rozhodněte, zda jsou veličiny R, Φ nezávislé.
2. Nechť $X, Y \sim R(0,1)$ jsou nezávislé veličiny. Určete rozdělení n.v. $(X+Y, X-Y)^\tau$.
3. Nechť náhodný vektor má hustotu
$$f_{X,Y}(x,y) = \tfrac{x+y}{2} \cdot 1_{(0,1)^2}(x,y) + \tfrac{x+y+1}{2} \cdot 1_{(0,1)}(x) \cdot 1_{(-1,0)}(y).$$
a) Rozhodněte, zda jsou veličiny X, Y nezávislé b) Rozhodněte, zda jsou nezávislé veličiny $|X|, |Y|$.
4. Nechť $X, Y \sim N(0,1)$ jsou nezávislé, najděte sdružené rozdělení veličin $U = X^2 + Y^2, V = X/Y$. Najděte marginální rozdělení veličin U, V.
5. Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou 1. Určete sdružené rozdělení veličin $X, |X-Y|$ a rozdělení náhodné veličiny $|X-Y|$.

- Nechť X má hustotu $f_X(x)$ a nabývá sj. hodnot v otevřené množině $G \subseteq \mathbb{R}^k$. Je-li $\varphi \in C^1(G)$ prosté regularní zobrazení mj. splňující $J_\varphi(x) \neq 0$ na G s oborem hodnot H, pak náhodná veličina $Y = \varphi(X)$ má spojité rozdělení s hustotou
$$f_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y)) \cdot |J_{\varphi^{-1}(y)}| \cdot 1_H(y).$$
- Nechť X má hustotu $f_X(x)$ a nabývá sj. hodnot v $G = \dot\cup_n G_n$. Je-li $\varphi_n = \varphi|_{G_n} \in C^1(G_n)$ prosté regulární zobrazení mj. splňující $J_{\varphi_n} \neq 0$ na otevřené množině G_n a nechť $\{\varphi(x), x \in G_n\} = H_n$, pak náhodná veličina $Y = \varphi(X)$ má spojité rozdělení s hustotou
$$f_Y(y) = \textstyle\sum_n f_X(\varphi_n^{-1}(y)) \cdot |J_{\varphi_n^{-1}}(y)| \cdot 1_{H_n}(y), \quad \text{kde} \quad \varphi_n = \varphi|_{G_n}.$$
- Nechť X, Y jsou spojité reálné náhodné veličiny po řadě s hustotami f_X a f_Y a se sdruženou hustotou $f_{X,Y}(x,y)$. Pro $M, N \subseteq \mathbb{R}$ označme
$$S_M(X) = \{x \in \mathbb{R} : \ \forall \varepsilon > 0 \ \ P(|X-x| < \varepsilon, X \in M) > 0\}$$
$$S_N(Y) = \{y \in \mathbb{R} : \ \forall \varepsilon > 0 \ \ P(|Y-y| < \varepsilon, Y \in N) > 0\}$$
Pokud existuje $z_0 = (x_0, y_0) \in S_M(X) \times S_N(Y)$ a existují limity
$$\lim_{M \ni x \to x_0} f_X(x) = \alpha \in \mathbb{R}, \quad \lim_{N \ni y \to y_0} f_Y(y) = \beta \in \mathbb{R}, \quad \lim_{M \times N \ni z \to z_0} f_{X,Y}(z) = \gamma \in \mathbb{R}$$
takové, že $\alpha\beta \neq \gamma$, pak veličiny X, Y nejsou nezávislé, neboť existuje $\varepsilon > 0$ takové, že
$$f_X(x) f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x,y)$$
platí na množině kladné míry $\{(x,y) \in M \times N : |x - x_0| < \varepsilon, |y - y_0| < \varepsilon\}$.