Cvičení z teorie pravděpodobnosti 1

3. nezávislost dvou náhodných veličin, dvojrozměrná transformace hustoty

1. posouzení nezávislosti veličin se sdruženým spojitým rozdělením
2. výpočet podmíněné hustoty jevem s kladnou pravděpodobností
3. posouzení nezávislosti spojité a diskrétní náhodné veličiny

---

1. Nechť náhodný vektor $(X,Y)^{\mathsf{T}}$ má rovnoměrné rozdělení na $\{(x,y) : x^2+y^2<1\}$. Rozhodněte, zda jsou veličiny X,Y nezávislé.
2. Nechť $(X,Y)^{\mathsf{T}}$ má rovnoměrné rozdělení na $(-1,1)^2$. Rozhodněte, zda jsou veličiny X,Y nezávislé.
3. Nechť $(X,Y)^{\mathsf{T}}$ má normální rozdělení s hustotou (1). Rozhodněte, zda jsou veličiny X,Y nezávislé.

$$f(x,y) = \tfrac{(1-\rho^2)^{-1/2}}{2\pi}\exp\{-\tfrac{x^2+y^2-2\rho xy}{2(1-\rho^2)}\}. \tag{1}$$

4. Nechť n.v. X má exponenciální rozdělení, pro $y>0$ určete rozdělení n.v. X za podmínky $X>y$.
5. Nechť náhodný vektor $(X,Y)^{\mathsf{T}}$ má rovnoměrné rozdělení na $(-1,1)^2$. Určete podmíněné rozdělení vektoru $(X,Y)^{\mathsf{T}}$ za podmínky $X^2+Y^2<1$.
6. Nechť $Z\sim N(0,1)$. Rozhodněte, zda jsou veličiny $X=|Z|, Y=\operatorname{sign}(Z)$ nezávislé.
7. Nechť $Z\sim R(0,n)$, kde $n\in\mathbb{N}$, rozhodněte, zda jsou nezávislé veličiny $X=Z \bmod 1, Y=Z \operatorname{div} 1$.

- Je-li $(X,Y)^{\mathsf{T}}$ reálný náhodný vektor s hustotou $f(x,y)$. Pak jsou veličiny X,Y nezávislé právě tehdy, když platí $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ sv., kde $f_X(x)=\int f(x,y)\,\mathrm{d}y, f_Y(y)=\int f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

- Pokud X,Y jsou nezávislé spojité náhodné veličiny, pak $\mathrm{S}(X,Y)=\mathrm{S}(X)\times\mathrm{S}(Y)$, kde

$$\mathrm{S}(X)=\{x : \forall\,\varepsilon>0 \quad P(|X-x|<\varepsilon)>0\}.$$

Důkaz: Zřejmě $S(P_{X,Y})\subseteq S(P_X)\times S(P_Y)$. Nechť tedy $(x,y)\in S(P_X)\times S(P_Y)\backslash S(P_{X,Y})$. Ukážeme, že pak veličiny X,Y nejsou nezávislé. Z def. $S(X),S(Y),S(X,Y)$ plyne, že existuje $\varepsilon>0$ takové, že

$$P(|X-x|<\varepsilon, |Y-y|<\varepsilon)=0\neq P(|X-x|<\varepsilon)P(|Y-y|<\varepsilon).$$

- Nechť $X=(X_1,\ldots,X_k)^{\mathsf{T}}$ má spojité rozdělení s hustotou $f_X(x)$ a $C\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, pak n.v. X má za podmínky $[X\in C]$ spojité rozdělení s hustotou $f_{X|X\in C}=f_X(x)\cdot 1_C(x)/P(X\in C)$.

- Pokud $X=Y$ platí na $B\in\mathcal{A}$ s $P(B)>0$, kde X,Y jsou náhodné veličiny se stejným stavovým prostorem, pak $P_{X|B}=P_{Y|B}$. Speciálně, pokud např. n.v. X je spojitá při $P_{|B}$, je spojitá i n.v. Y při $P_{|B}$ a platí $f_{X|B}(x)=f_{Y|B}(x)$ pro sv. x.