Cvičení z teorie pravděpodobnosti 1

2. diskrétní náhodná veličina s hodnotami v $\mathbb{N}_0$, jednorozměrná transformace hustoty

1. výpočet vytvořující funkce $\boxed{\varphi_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(X = n)}$
2. výpočet momentů z vytvořující funkce $\boxed{EX = \varphi'_X(1), EX(X-1) = \varphi''_X(1)}$
3. prostá transformace jednorozměrné hustoty
4. neprostá transformace jednorozměrné hustoty

---

1. Spočtěte vytvořující funkci, střední hodnotu a rozptyl geometrického rozdělení $P(X = n) = p(1-p)^n$.
2. Spočtěte vytvořující funkci, střední hodnotu a rozptyl Poissonova rozdělení $P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$
3. Nechť X má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 1, určete rozdělení n.v. $Y = e^{-X}$.
4. Nechť X má rovnoměrné rozdělení na $(0,1)$, určete rozdělení n.v. $Y = X^2$.
5. Nechť X má Cauchyho rozdělení s hustotou $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$. Určete rozdělení n.v. $Y = \arctan(X)$.
6. Nechť X má rovnoměrné rozdělení na $(-1,1)$, určete rozdělení n.v. $Y = |X|$.
7. Nechť X má rovnoměrné rozdělení na $(0, 2\pi)$, určete rozdělení n.v. $Y = \cos(X)$.

- Nechť X má hustotu $f_X(x)$ a nabývá sj. hodnot v intervalu (a,b). Je-li $\varphi \in C^1(a,b)$ s $\varphi'(x) \neq 0$ na (a,b) a s oborem hodnot (c,d), pak náhodná veličina $Y = \varphi(X)$ má spojité rozdělení s hustotou

$$\boxed{f_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y)) \cdot \left|\frac{\mathrm{d}\varphi^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}\right| \cdot 1_{(c,d)}(y)}\,.$$

  Důkaz:[1] Označme $\psi = \varphi^{-1} : (c,d) \to (a,b)$. Pokud $(a,b) = [f_X \neq 0]$, pak podle věty o substituci

$$F_Y(y) = P(\varphi(X) < y) = P(X \in \varphi^{-1}(-\infty, y)) = \int_{\varphi^{-1}(-\infty,y)} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{y} f_X(\psi(z))|\psi'(z)|\,\mathrm{d}z.$$

- Nechť X má hustotu $f_X(x)$ a nabývá sj. hodnot v $G = \dot{\bigcup}_n (a_n, b_n)$. Je-li $\varphi \in C^1(G)$ s $\varphi'(x) \neq 0$ na G a $\{\varphi(x), x \in (a_n, b_n)\} = (c_n, d_n)$, pak náhodná veličina $Y = \varphi(X)$ má spojité rozdělení s hustotou

$$f_Y(y) = \sum_n f_X(\varphi_n^{-1}(y)) \cdot \left|\frac{\mathrm{d}\varphi_n^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}\right| \cdot 1_{(c_n,d_n)}(y), \quad \text{kde} \quad \varphi_n = \varphi|_{(a_n,b_n)}.$$

- Náčrt mechanického (algoritmického) postupu:
  1. Pro názornost přeznačíme zobrazení, které převádí náh. veličinu X na náh. veličinu $Y = y(X)$. V rovině proměnných lze případně psát $y = y(x)$.
  2. Vyjádříme veličinu $X = x(Y)$ pomocí Y, čímž spočteme inverzi $x = x(y)$ k funkci $y = y(x)$. Tím také ověříme, že funkce $y = y(x)$ je prostá.
  3. V případě nepřekonatelných potíží při stanovení inverzního zobrazení lze přikročit ke stanovení tzv. parciálních inverzí s tím, že se chystáme použít zobecněnou verzi věty o transformaci hustoty. Příkladem je přechod od funkce $y = y(x) = |x|$ k parciálním inverzím $x = x_\pm(y) = \pm y$ s přirozeným omezením $y > 0$.[2]
  4. Stanovíme definiční obor $\mathrm{dom}(x)$[3] inverze $x = x(y)$ popř. totéž pro parciální inverze a to
     (a) zohledněním potíží a zábran při výpoču inverze $x = x(y)$
     (b) zohledněním zřejmých omezení případně s využitím grafického znázornění pro ozřejmení.
  5. Spočteme derivaci $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} x(y) = x'(y)$ pro $y \in \mathrm{dom}(x)$ resp. totéž pro parciální inverze.
  6. Sestavíme transformovanou hustotu jako součin tří faktorů

$$\boxed{f_Y(y) = f_X(x(y)) \cdot x'(y) \cdot 1_{[y \in \mathrm{dom}(x)]}}$$

     popř. provedeme sumaci[4] takovýchto hodnot v případě použití zobecněné věty o transformaci.

---

[1] Jde pouze o náznak důkazu.

[2] Omezení uvažujeme v otevřené podobě tak, jak to odpovídá formulaci věty o transformaci.

[3] Zkratka dom značí domain, tedy definiční obor příslušného zobrazení.

[4] V příkladě uvedném v bodě 3 bychom pak dostali

$$\boxed{f_Y(y) = f_X(x_+(y)) \cdot x'_+(y) \cdot 1_{[y \in \mathrm{dom}(x_+)]} + f_X(x_-(y)) \cdot x'_-(y) \cdot 1_{[y \in \mathrm{dom}(x_-)]}}\,.$$