Cvičení z teorie pravděpodobnosti 1

1. dvě diskrétní náhodné veličiny nabývající konečně mnoha hodnot

1. sestavení pravděpodobnostní tabulky + porozumění zápisu
2. výpočet marginálního rozdělení obou veličin a jeho zápis do tabulky + porozumění zápisu
3. posouzení nezávislosti veličin $P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y)$, zkráceně $X \perp\!\!\!\perp Y$
4. výpočet EX, EY, EX^2, EY^2 z marginálního rozdělení + následný výpočet $\mathrm{var}(X), \mathrm{var}(Y) \geq 0$
5. výpočet smíšeného momentu EXY a následně $\mathrm{cov}(X,Y)$ a také $\mathrm{cor}(X,Y) \in [-1,1]$.
6. prostá transformace pravděpodobnostní tabulky
7. neprostá transformace pravděpodobnostní tabulky
8. práce s var, cov : $\mathrm{var}(aX+b) = a^2\mathrm{var}(X), \mathrm{cov}(aX+b, Y) = a\mathrm{cov}(X,Y), \mathrm{cov}(X,X) = \mathrm{var}(X) \geq 0$

---

1. Reálný náhodný vektor $(X,Y)^\intercal$ má rovnoměrné rozdělení na množině $\{(0,1),(1,0),(1,1),(0,2)\}$.

   a) Spočtěte obě marginální rozdělení a varianční matici vektoru $(X,Y)^\intercal$.

   b) Rozhodněte, zda jsou veličiny X, Y nezávislé a zda jsou nezávislé veličiny $X, X+Y$.

2. Reálný náhodný vektor $(X,Y)^\intercal$ nabývá hodnot

$$(-1,0),(0,0),(1,0),(-1,2),(0,2),(1,2) \quad \text{s pravděpodobností} \quad \tfrac{1}{12}$$
$$(0,1) \quad \text{s pravděpodobností} \quad \tfrac{1}{6}, \quad (1,1) \quad \text{s pravděpodobností} \quad \tfrac{1}{3}.$$

   a) Rozhodněte, zda jsou veličiny X, Y nezávislé.

   b) Rozhodněte, zda jsou veličiny $|X|, Y$ nezávislé a zda jsou nezávislé veličiny $|X|, |Y-1|$.

3. Reálný náhodný vektor $(X,Y)^\intercal$ má rovnoměrné rozdělení na množině $\{(0,1),(0,3),(1,0),(1,2),(2,1),(2,3)\}$.

   a) Rozhodnětě, zda jsou veličiny X, Y nezávislé a zda jsou nezávislé veličiny $X-Y, X+Y$.

   b) Spočtěte varianční matici vektoru $(X, Y, X-Y, X+Y)^\intercal$.

4. Reálný náhodný vektor $(X,Y)^\intercal$ má rovnoměrné rozdělení na množině $\{(0,0),(1,1),(2,2),(1,-1),(2,0),(3,1)\}$.

   a) Rozhodnětě, zda jsou veličiny X, Y nezávislé a zda jsou nezávislé veličiny $X-Y, X+Y$.

   b) Spočtěte varianční matici vektoru $(X, Y, X-Y, X+Y)^\intercal$.

$Y \backslash X$	$(x_j)_1^n$	Σ_x
$(y_i)_1^m$	$P_{X,Y}$	P_Y
Σ_y	$P_X^\intercal$	1

$Y \backslash X$	x_0	x_1	x_2	Σ_x
y_0	$P(X=x_0, Y=y_0)$	$P(X=x_1, Y=y_0)$	$P(X=x_2, Y=y_0)$	$P(Y=y_0)$
y_1	$P(X=x_0, Y=y_1)$	$P(X=x_1, Y=y_1)$	$P(X=x_2, Y=y_1)$	$P(Y=y_1)$
y_2	$P(X=x_0, Y=y_2)$	$P(X=x_1, Y=y_2)$	$P(X=x_2, Y=y_2)$	$P(Y=y_2)$
Σ_y	$P(X=x_0)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	1

$$\mathrm{var}(X) = EX^2 - (EX)^2 \geq 0, \quad \mathrm{cov}(X,Y) = EXY - EXEY, \quad \mathrm{cor}(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)}} \in [-1,1]$$

Diskrétní veličiny X, Y jsou nezávislé ($X \perp\!\!\!\perp Y$) právě tehdy, když $P_{X,Y} = P_Y P_X^\intercal$ [$\equiv\ h(P_{X,Y}) = 1$].

Důkaz: Zřejmě $X \perp\!\!\!\perp Y \equiv P_{X,Y} = P_Y P_X^\intercal$. Pokud $P_{X,Y} = P_Y P_X^\intercal$, pak pro hodnost matice $P_{X,Y}$ platí

$$1 \leq h(P_{X,Y}) = h(P_Y P_X^\intercal) \leq h(P_Y) \leq 1,$$

neboť $0_{m\times n} \neq P_{X,Y}$. Pokud naopak $h(P_{X,Y}) = 1$, existují $a \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n$ takové, že $P_{X,Y} = ab^\intercal$. Pak

$$P_Y = P_{X,Y}1_n = ab^\intercal 1_n, \qquad P_X^\intercal = 1_m^\intercal P_{X,Y}^\intercal = 1_m^\intercal ab^\intercal, \qquad P_Y P_X^\intercal = a(b^\intercal 1_n 1_m^\intercal a)b^\intercal = ab^\intercal = P_{X,Y},$$

neboť $1 = 1_m^\intercal P_{X,Y} 1_n = 1_m^\intercal ab^\intercal 1_n = 1_m^\intercal a \cdot b^\intercal 1_n = b^\intercal 1_n \cdot 1_m^\intercal a = b^\intercal 1_n 1_m^\intercal a$, kde $1_k = (1,\ldots,1)^\intercal \in \mathbb{R}^k$. ***Q.E.D.***

Pokud $P(X=x, Y=y) = 0 < P(X=x), P(Y=y)$ pro nějaké $x, y \in \mathbb{R}$, pak $X \not\perp\!\!\!\perp Y$.