Cvičení z teorie pravděpodobnosti 2

1. symetrická náhodná procházka a Poissonův proces

1. princip zrcadlení, stejnoměrná konvergence distribučních funkcí v CLV
2. transformace hustoty vícerozměrného reálného náhodného vektoru, výpočet marginální hustoty
3. výpočet elementární podmíněné hustoty, rozpoznání nezávislosti podvektorů
4. rozpoznání nezávislosti - podmíněné rozdělení nezávisí na podmínce

---

1. Nechť $X_n, n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé náhodné veličiny s $X_n \sim R\{-1, 1\}$ a $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Označme

$$\tau_k = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = k\}, \quad M_n = \max_{k \le n} S_k.$$

   (a) Ukažte, že $P(S_n = k + \alpha) = P(M_n \ge k, S_n = k - \alpha)$ platí, pokud $\alpha, k \in \mathbb{N}$.

   (b) Ukažte, že $P(M_n \ge k) = 2P(S_n \ge k)$ platí, pokud $n + k$ je liché.

   (c) Ukažte, že $P(S_n \ge k) \to \frac{1}{2}$ pro $n \to \infty$.

   (d) Ukažte, že $P(\tau_k < \infty) = 1$ platí pro každé $k \in \mathbb{N}$ (a tedy stavy SNP jsou trvalé).

2. *Poissonovým procesem s intenzitou* $\lambda > 0$ rozumíme proces

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{[S_k \le t]}, \qquad \text{kde} \qquad S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$$

   a kde $X_n, n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé kladné náhodné veličiny s hustotou $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} \cdot 1_{(x>0)}$.

   (a) Pro $n \in \mathbb{N}$ ukažte, že $f_{S_1,\dots,S_n}(s_1, \dots, s_n) = \lambda^n e^{-\lambda s_n} \cdot 1_{(0<s_1<\dots<s_n)}$.

   (b) Pro $k \in \mathbb{N}$ ukažte, že $f_{S_k,S_{k+1}}(y, z) = \lambda^{k+1} \frac{y^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{-\lambda z} \cdot 1_{(0<y<z)}$.

   (c) Pro $k \in \mathbb{N}_0$ ukažte, že $P(N_t = k) = P(S_k \le t < S_{k+1}) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}\, e^{-\lambda t}$, tj. $N_t \sim \mathtt{Po}(\lambda t)$.

   (d) Pro $n > k$ ukažte, že $f_{S_1,\dots,S_n|N_t=k}(s_1, \dots, s_n) = k!\, \lambda^{n-k} t^{-k} e^{-\lambda(s_n - t)} \cdot 1_{(0<s_1<\dots<s_k \le t<s_{k+1}<\dots<s_n)}$.

   (e) Pro $n > k$ ukažte, že $f_{S_1,\dots,S_k|N_t=k}(s_1, \dots, s_k) = k!\, t^{-k} 1_{(0<s_1<\dots<s_k \le t)}$ (rovnoměrné rozdělení).

   (f) Pro $n > k$ ukažte, že $f_{S_{k+1},\dots,S_n|N_t=k}(s_{k+1}, \dots, s_n) = \lambda^{n-k} e^{-\lambda(s_n-t)} \cdot 1_{(t<s_{k+1}<\dots<s_n)}$.

   (g) Ukažte, že $(S_1, \dots, S_k)^\intercal$ a $(S_n)_{n=k+1}^{\infty}$ jsou nezávislé při míře $P_{|N_t=k}$.

   (h) Ukažte, že $P_{(S_{k+j}-t)_{j=1}^{\infty}|N_t=k} = P_{(S_n)_{n=1}^{\infty}}$.

   (i) Ukažte, že $N_h^{[t]} = N_{t+h} - N_t$ je Poissonův proces při míře $P_{|N_t=k}$, kdykoli $k \in \mathbb{N}_0$.

   (j) Ukažte, že proces $N^{[t]}$ je nezávislý s $(S_1, \dots, S_k)^\intercal$ při míře $P_{|N_t=k}$.

   (k) Ukažte, že Poissonův proces $(N_t, t \ge 0)$ má nezávislé přírůstky.

   (l) Ukažte, že $P_{(N_r, r\ge t)|(N_r, r\le t)} = P_{(N_r, r\ge t)|N_t}$, tj. $(N_t, t \ge 0)$ je markovský proces.

   (m) Ukažte, že $P_{(N_r, r\le t)|N_t}$ nezávisí na $\lambda > 0$, tj. N_t je postačující statistika pro systém $(N_r, r \le t)$.

   (n) Pro $n > k$ ukažte, že $P_{S_1,\dots,S_k|N_t=k} = P_{Y_{(1)},\dots,Y_{(k)}}$, kde $Y_{(1)} \le \dots Y_{(k)}$ je posloupnost vzniklá uspořádáním posloupnosti nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin $Y_1, \dots, Y_k$ s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(0, t)$.

- Je-li S_n SNP a $\tau_k = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \ge k\}$, pak $P(\tau_k < \infty) = 1$ platí pro každé $k \in \mathbb{N}$.
- Poissonův proces $(N_t, t \ge 0)$ s intenzitou $\lambda > 0$ má nezávislé přírůstky s $N_{t+h} - N_t \sim \mathtt{Po}(\lambda h)$.
- N_t je postačující statistika pro systém $(N_r, r \le t)$, tj. $P_{(N_r, r\le t)|N_t}$ nezávisí na velikosti hodnoty $\lambda > 0$.