

## Cvičení MOD009 23. a 24.5.2011

### Příklad 1:

Ukažte, že exponenciální rozdělení je rozdělení bez paměti, tj. že pro náhodnou veličinu  $Y$  s exponenciálním rozdělením platí

$$P(Y > s + h | Y > s) = P(Y > h)$$

### Příklad 2:

Ukažte, že součet  $k$  nezávislých náhodných veličin s exponenciálním rozdělením s parametrem  $\lambda$  - tj. hustotou  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ,  $x > 0$ , má Erlangovo (Gamma) rozdělení s parametry  $\lambda$  a  $k$ , tj. s hustotou

$$g_k(x) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

### Příklad 3:

Ověřte, že pro Poissonův proces  $(N(t), t \geq 0)$  platí následující rovnosti:

$$\begin{aligned} P(N(t+h) = k+1 | N(t) = k) &= \lambda h + o(h), \\ P(N(t+h) = k | N(t) = k) &= 1 - \lambda h + o(h), \\ P(N(t+h) > k+1 | N(t) = k) &= o(h), \end{aligned}$$

kde pro funkci  $o(h)$  platí  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$ .

### Příklad 4: Simulování Poissonova procesu

Ověřte, že oba následující algoritmy opravdu generují Poissonův proces s intenzitou  $\lambda > 0$  na intervalu  $[0, T]$ .

Algoritmus 1: Generujme posloupnost nezávislých náhodných veličin  $\xi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  s exponenciálním rozdělením s parametrem  $\lambda$ . Definujme

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I\left\{\left(\sum_{j=1}^k \xi_j\right) \leq t\right\}, \quad \text{pro } t \in [0, T].$$

Algoritmus 2:

Krok 1.: Generujme hodnotu náhodné veličiny  $S$ , která má Poissonovo rozdělení s parametrem  $\lambda T$  - toto bude celkový počet událostí na intervalu  $[0, T]$ .

Krok 2: Vygenerujme celkem  $S$  nezávislých náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením na intervalu  $[0, T]$ . Setřídme je do neklesající posloupnosti a tuto neklesající posloupnost vezměme za časy událostí - Poissonův proces je pak odpovídající čítací proces.