Základy matematického modelování

Nedopatření v podpůrném textu, na přednášce a případné neškodné odchylky.

- V definici splajnu uznávám pojem dělící bod jako ekvivalentní pojmu ***uzlový bod***.
- U lineárních systémů regulace jsem ***jednotkový skok*** také nazval jednotkovým přechodem (v souvislosti s odezvou, kterou nazýváme přechodovou charakteristikou). Připouštím oba názvy.
- U lineárních systémů regulace jsem definoval, že ***soustava je stabilní***, pokud existuje limita g_∞ přechodové charakteristiky. V podpůrném textu je podmínka, že limita h_∞ impulsní charakteristiky má být rovna nule ovšem s restrikcí na modely, kde obě definice vycházejí nastejno. Ve výsledku je tak definice uvedená na přednášce pouze rozšířením definice z podpůrného textu a v konkrétních modelech na cvičení a v písemce si obě definice odpovídají.
- ***Bílý šum*** je vždy centrovaný (s nulovou střední hodnotou) a je nedegenerovaný (má kladný rozptyl). ***Striktní bílý šum*** je podle definice vždy centrovaný a nedegenerovaný. Zde u striktního bílého šumu rozptyl může být nekonečný. Uvědomte si, že rozptyl je dobře definovaný, kdykoli je střední hodnota je konečná. Zde je striktní bílý šum slabým bílým šumem právě tehdy, když má konečný rozptyl.
- V poznámkce na str. 28 má být předpoklad, že jde o konečný homogenní markovský řetězec.
- V úplném modelu na str. 29 má být hustota rozdělení $\Gamma(\tau, h)$ ve tvaru $f_{\tau,h}(\lambda) = \frac{\tau^h \lambda^{h-1}}{\Gamma(h)} e^{-\tau\lambda}, \lambda > 0$.
- *Poznámka za definicí 19 pojmu autoregresní posloupnosti:* Poznámka neplatí.
  Poznámka by (nejspíš) platila, pokud bychom navíc předpokládali, že veličina ε_{t+1} je nekorelovaná s veličinami $(X_t, \ldots, X_{t-p})$. Jednoduchým protipříkladem je model AR(1): $X_t = 2X_{t-1} + \varepsilon_t$. Podobný postup jako v ilustrativním příkladu v textu nám dá následující:

  $$X_t = 2^{-1}(X_{t+1} - \varepsilon_{t+1}) = 2^{-2}X_{t+2} - (2^{-1}\varepsilon_{t+1} - 2^{-2}\varepsilon_{t+2}) = 2^{-n}X_{t+n} - \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\varepsilon_{t+k}.$$

  Pokud bychom chtěli k protipříkladu dojít sami, řekli bychom si, že chceme, aby výsledná posloupnost $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ byla stacionární, a v tom případě $E|2^{-n}X_{t+n}|^2 \to 0$ pro $n \to \infty$. Tím docházíme k vlastní představě o protipříkladu

  $$X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\varepsilon_{t+k} \triangleq -\mathbb{L}_2 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\varepsilon_{t+k}.$$

  Tato posloupnost je skutečně stacionární a skutečně vyhovuje předepsanému modelu AR(1), neboť

  $$X_t - 2X_{t-1} = 2\Big(\frac{\varepsilon_t}{2} + \frac{\varepsilon_{t+1}}{4} + \frac{\varepsilon_{t+2}}{8} + \ldots\Big) - \Big(\frac{\varepsilon_{t+1}}{2} + \frac{\varepsilon_{t+2}}{4} + \frac{\varepsilon_{t+3}}{8} + \ldots\Big) = \varepsilon_t.$$

  Zde ovšem $cov(X_t, \varepsilon_{t+1}) = -1/2$.

AR model $d_0X_t + \ldots + d_pX_{t-p} = \varepsilon_t$ může být stacionární mimo jiné ve dvou následujících případech. V prvním případě jsou kořeny polynomu $D(x) = d_0x^p + \ldots + d_p$ uvnitř jednotkového kruhu. V takovém případě v souladu s teorií lineárních systémů regulace lze uvažovat následující stacionární řešení

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} h_k\varepsilon_{t-k}. \tag{1}$$

V druhém případě jsou naopak kořeny polynomu $D(x)$ vně jednotkového kruhu a opět v souladu s teorií lineárních systémů regulace ovšem „s převrácením toku času” máme podobně jako ve výše uvedeném protipříkladu následující stacionární řešení

$$X_t = \sum_{k=p}^{\infty} \tilde{h}_k\varepsilon_{t+k}. \tag{2}$$

Ani v jednom z těchto příkladu není žádný kořen polynomu $D(x)$ na hranici jednotkového kruhu. Podobným postupem jako v podpůrném textu pak dojdeme k závěru, že pak stacionární autoregresní posloupnost bude mít v těchto případech nulovou střední hodnotu.

Korektní formulace poznámky neopírající se o těžko dokazatelná tvrzení:

1. Pokud jsou kořeny polynomu $D(x)$ uvnitř jednotkového kruhu, pak má AR model stacionární řešení ve tvaru (1), kde nově přicházející bílého šumu jsou nekorelované s dosud pozorovanými veličinami AR posloupnosti. Pokud jsou kořeny polynomu $D(x)$ vně jednotkového kruhu, pak má AR model stacionární řešení ve tvaru (2).
2. Pokud nastává některý z předchozích dvou případů, pak kořeny polynomu $D(x)$ jsou všechny buď uvnitř, nebo vně jednotkového kruhu, nikdy však na hranici, a tedy 1 není nikdy kořenem polynomu $D(x)$. Pak „dle postupu v podpůrném textu" je uvažovaná AR posloupnost centrovaná.

Odvození Yule-Walkerových rovnic předpokládá stacionární AR model, kde je nově přicházející bílý šum nekorelovaný s dosud pozorovanými členy AR posloupnosti.

Příklad: Uvažujme AR(2) model $X_t - \frac{5}{2}X_{t-1} + X_{t-2} = \varepsilon_t$, kde $\{\varepsilon_t\}$ je bílý šum. Tento model má stacionární řešení ve tvaru

$$X_t = -\frac{2}{3}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-|k|}\varepsilon_{t+1-k} = -\frac{2}{3}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-|k+1|}\varepsilon_{t-k}.$$

Taková posloupnost je zřejmě stacionární dle poznámky z přednášky, neboť $\sum_k (2^{-|k|})^2 < \infty$. Dále ověříme, že je řešením výše uvedeného modelu AR(2). Rozpisem dostaneme

$$X_t - \frac{5}{2}X_{t-1} + X_{t-2} = \frac{2}{3}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon_{t-k}(-2^{-|k+1|} + \frac{5}{2}2^{-|k|} - 2^{-|k-1|}) = \varepsilon_t.$$

Kořeny polynomu $D(x) = x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = (x-2)(x-1/2)$ jsou $x_1 = 2$ a $x_2 = 1/2$. Jeden je uvnitř jednotkového kruhu a druhý vně.

- Řekneme, že náhodný proces $(N_t)_{t\geq 0}$ indexovaný množinou $T = \mathbb{R}^+ = [0,\infty)$ je ***čítacím procesem***, pokud existuje posloupnost náhodných veličin $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ nabývajících potenciálně i hodnoty $+\infty$ a splňujících $\xi_k \to \infty$ pro $k \to \infty$ takových, že

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{[\xi_k \leq t]} = \text{card}\{k \in \mathbb{N}; \xi_k \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Řekneme, že proces $(X_t)_{t\geq 0}$ s hodnotami ve spočetné množině S je ***markovský řetězec (se spojitým časem)***, pokud je splněna tzv. markovská podmínka

$$P(N_{t_n} = k_n | N_{t_{n-1}} = k_{n-1}, \ldots, N_{t_1} = k_1) = P(N_{t_n} = k_n | N_{t_{n-1}} = k_{n-1}), \tag{3}$$

kdykoli $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ a $k_1, \ldots, k_n \in S$ jsou taková, že pravděpodobnost jevu v podmínce na levé straně (3) je kladná. Řekneme, že výše uvedený markovský proces je ***homogenní***, pokud existuje funkce $p_{jk}(h)$ taková, že

$$P(X_t + h = k | X_t = j) = p_{jk}(h), \tag{4}$$

kdykoli $t, h \geq 0$ a $j, k \in S$ jsou takové, že $P(X_t = j) > 0$. Jinými slovy, požadujeme, aby hodnota na levé straně (4) nezávisela na $t \geq 0$.

- Na přednášce jsme (z definice) ukázali, že Poissonův proces je homogenní markovský řetězec s množinou stavů $\mathbb{N}_0$.

Buď $(N_t)_{t\geq 0}$ Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$. S pomocí vlastnosti (128) z podpůrného textu odvodíme (jednorozměrné) rozdělení N_t pro $t \geq 0$ a to pomocí diferenciálních rovnic. Budeme zde předpokládat, že pravděpodobnosti $p_k(t) = P(N_t = k)$ jsou diferencovatelné a že splňují následující rovnosti

$$P(N_{t+h} = k+1 | N_t = k) = \lambda h + o(h), \quad P(N_{t+h} = k | N_t = k) = 1 - \lambda h + o(h). \tag{5}$$

Z věty o úplné pravděpodobnosti nejprve pro $k = 0$ dostaneme

$$P(N_{t+h} = 0) = P(N_t = 0)\, P(N_{t+h} = 0 | N_t = 0).$$

Odečtením hodnoty $P(N_t = 0)$, podělením hodnotou $h > 0$ a následným limitním přechodem $h \to 0^+$ dostaneme následující rovnost

$$p_0'(t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{P(N_{t+h} = 0) - P(N_t = 0)}{h} = p_0(t) \lim_{h\to 0^+} \frac{P(N_{t+h} = 0 | N_t = 0) - 1}{h} = -\lambda p_0(t).$$

Řešením této rovnice je funkce $p_0(t) = Ke^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$, kde konstantu $K = 1$ jsme určili z podmínky $1 = P(N_0 = 0) = p_0(0)$.

Pro $k \in \mathbb{N}$ dostaneme z věty o úplné pravděpodobnosti, že

$$P(N_{t+h} = k) = \sum_{j=0}^{k} P(N_t = j) P(N_{t+h} = k | N_t = j)$$

a podobným způsobem jako výše dostaneme

$$p_k'(t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{p_k(t+h) - p_k(t)}{h} = p_k(t) \lim_{h\to 0^+} \frac{p_{kk}(h) - 1}{h} + p_{k-1} \lim_{h\to 0^+} \frac{p_{k-1,k}(h)}{h} + \sum_{j=0}^{k-2} p_j(t) \lim_{h\to 0^+} \frac{p_{j,k}(h)}{h},$$

kde $p_{j,k}(h) = P(N_{t+h} = k | N_t = j)$. Využitím rovností (5) resp. rovnosti (128) z podpůrného textu dostaneme diferenciální rovnici ve tvaru

$$p_k'(t) = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Řešení této rovnice dostaneme metodou variace konstant ve tvaru $p_k(t) = K_k(t) p_0(t)$, neboť $p_0(t) = e^{-\lambda t}$ je řešením odpovídají homogenní rovnice. Dosazením do (6) dostaneme požadavek ve tvaru

$$K_k'(t) = \lambda p_{k-1}(t) e^{\lambda t} = \lambda K_{k-1}(t).$$

Postupně dostáváme $K_1'(t) = \lambda$, tedy $K_1(t) = \lambda t$. Dále pak $K_2'(t) = \lambda^2 t$, tedy $K_2(t) = \frac{1}{2}(\lambda t)^2$. Zde jsme dvakrát použili informaci, že $p_k(0) = 0$ pro $k \in \mathbb{N}$, a tedy i $K_k(0) = 0$. Postupně pak dojdeme k hypotéze

$$K_k(t) = \frac{1}{k!}(\lambda t)^k, \quad \text{tedy} \quad p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Tuto hypotézu lze snadno ověřit derivováním.

Poznámka: Lze ukázat, že každý homogenní markovský proces $(N_t)_{t\geq 0}$ startující z $N_0 = 0$, který je čítacím procesem a splňuje (5), je již Poissonův proces.

Toto tvrzení se můžeme pokusit alespoň myšlenkově ověřit.

Podle předpokladu $(N_t)_{t\geq 0}$ je čítací proces a startuje z $N_0 = 0$. Nás zajímá, zda má také nezávislé přírůstky a zda tyto přírůstky mají předepsané rozdělení. Protože víme, že např. veličiny $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé právě tehdy, když X_k je nezávislé s $(X_1, \dots, X_{k-1})$ pro každé $k = 2, \dots, n$, stačí nám k nezávislosti přírůstků ukázat, že platí

$$P(N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n | N_{t_{n-1}} - N_{t_{n-2}} = k_{n-1}, \dots, N_{t_1} - N_{t_0} = k_1) = \frac{1}{k_n!} [\lambda(t_n - t_{n-1})]^{k_n} e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})}. \qquad (7)$$

kdykoli $0 = t_0 \le t_1 \le \dots \le t_n, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$ a kdykoli pravděpodobnost jevu v podmínce je kladná. Kýžená nezávislost plyne z toho, že pravá strana nezávisí na hodnotách $k_{n-1}, \dots, k_1$. Jakmile navíc ukážeme (7), budeme mít také, že $N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda(t_n - t_{n-1})$. Abychom mohli využít předpokladu, že $(N_t)_{t\ge0}$ je markovský proces, přepíšeme si levou stranu (7) do následující tvaru a ihned markovskou podmínku použijeme

$$P(N_{t_n} = k_n + \dots + k_1 | N_{t_{n-1}} = k_{n-1} + \dots k_1, \dots, N_{t_1} = k_1) = P(N_{t_n} = k_n + \dots + k_1 | N_{t_{n-1}} = k_{n-1} + \dots k_1).$$

Abychom ukázali rovnost (7) je třeba, ve zjednodušeném zápisu, ukázat, že

$$P(N_t = k + j | N_s = j) = \frac{1}{k!} [\lambda(t - s)]^k e^{-\lambda(t-s)} \qquad (8)$$

platí, kdykoli $0 \le s \le t$ a kdykoli $j, k \in \mathbb{N}_0$. Protože však předpokládáme, že $(N_t)_{t\ge0}$ je homogenní markovský řetězec splňující (5), můžeme použít analogický postup jako pro odvození absolutních pravděpodobností Poissonova procesu, abychom dostali rovnost (8). Místo absolutních pravděpodobností $p_k(t) = P(N_t = k)$ bychom uvažovali přechodové pravděpodobnosti $p_{kj}(t) = P(N_{t+s} = k | N_s = j)$, které budou splňovat analogické diferenciální rovnice

$$p'_{kj}(t) = -\lambda p_{kj}(t) + \lambda p_{k-1,j}(t)$$

ovšem s počátečními podmínkami $p_{kj}(0) = 1_{[j=k]}$. Zřejmě $p_{kj}(t) \equiv 0$ pro $k < j$ díky triviální počáteční podmínce. Dále pak dostaneme $p_{jj}(t) = e^{-\lambda t}$ a analogicky jako při odvození absolutních pravděpodobností bychom dostali, že

$$p_{k+j,j}(t) = p_k(t) = \frac{1}{k!} (\lambda t)^k e^{-\lambda t}.$$

Docházíme tak k závěru, že proces $(N_t)_{t\ge0}$ má nezávislé přírůstky s předepsaným rozdělením, a je to tedy Poissonův proces.

- V podpůrném textu v příkladu „Obslužná linka” má být závěr, že pro $\lambda < \mu$ je nalezené rozdělení geometrické s pravděpodobností zdaru $1 - \rho = 1 - \lambda/\mu$.

Poznámka: Při odvozování v příkladu „Obslužná linka” jsme potřebovali zapomínací vlastnost exponenciálního rozdělení ovšem v poněkud pokročilejším a to v následujícím tvaru: Buďte $0 \le X, Y$ nezávislé reálné náhodné veličiny, $Y \sim \Gamma(\mu, 1)$ s exponenciálním rozdělením s intenzitou $\mu > 0$. Pak pro $t \ge 0$ platí

$$\boxed{P(X + Y > t + h | X + Y > t \ge X) = e^{-\mu h} = P(Y > h), \quad h \ge 0} \qquad (9)$$

kdykoli je jev v podmínce pravděpodobný. (!!! Pro představu je naprosto nutné si nakreslit obrázek !!!) Pro $X \equiv 0$ máte klasickou zapomínací vlastnost. Veličina X modeluje předcházející událost, která do času t již nastala a veličina $X + Y$ následnou veličinu, která nastane až po čase $t \ge 0$. Podmínku (9) lze vyjádřit heslem ,,podmíněné rozdělení $X + Y - t$ doby do další události má exponenciální rozdělení s intenzitou μ”.

1. Nejprve si všimněme, že podmínku (9) stačí ověřovat v následujícím (již upraveném) ,,součinovém” tvaru
$$P(X + Y > t + h, t \ge X) = e^{-\mu h} P(X + Y > t \ge X), \quad h \ge 0. \qquad (10)$$
2. Tuto podmínku lze snadno ověřit výpočtem za předpokladu, že veličina $X \equiv x$ je deterministická. Obě strany totiž vyjdou $1_{[t\ge x]} e^{-\mu(t+h-x)}, h \ge 0$. Platí tedy
$$P(x + Y > t + h, t \ge x) = e^{-\mu h} P(x + Y > t \ge x), \quad x, h \ge 0. \qquad (11)$$
3. Protože jsou veličiny X, Y dle předpokladu nezávislé, je možné obě strany (10) vyjádřit jako integrál v proměnné x odpovídajících stran (11) dle rozdělení P_X veličiny X. Tím dostaneme (10) přímo z (11).

   Zde využíváme rovnost $Ef(X, Y) = \int E[f(x, Y)] \, dP_X(x)$ pro X, Y nezávislé veličiny, kde f je indikátor borelovské množiny v $\mathbb{R}^2$.