# 1. Opakování, značení - filtrace

Buď $(\Omega, \mathcal{A})$ měřitelný prostor. Označme $\mathbb{L}(\mathcal{A}) = \{X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})\}$ množinu všech reálných $\mathcal{A}$-měřitelných náhodných veličin, kde $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ značí borelovskou $\sigma$-algebru na reálné přímce $\mathbb{R}$. Je-li $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E})$, pak symbolem

$$\sigma(X) = \sigma_{\mathcal{E}}(X) = \{[X \in B]; B \in \mathcal{E}\}$$

označujeme ***$\sigma$-algebru generovanou náhodnou veličinou*** $X$. Dále zkráceně píšeme $\mathbb{L}(\sigma(X)) = \mathbb{L}(X)$. Je-li $Y \in \mathbb{L}(X)$, pak existuje $h \in \mathbb{L}(\mathcal{E})$ taková, že $Y = h(X)$ a zápis $Y \in \mathbb{L}(X)$ pak čteme: reálná náhodná veličina ***$Y$ je měřitelnou funkcí*** náhodné veličiny ***$X$***. Je-li $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebra, pak je generovaná ***kanonickou náhodnou veličinou $\sigma$-algebry*** $\mathcal{A}$ ve tvaru

$$\mathbf{1}_{\mathcal{A}} = (1_A, A \in \mathcal{A}) : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})^{\mathcal{A}},$$ [1]

která je reálným náhodným procesem indexovaným množinou $\mathcal{A}$ říkající, který z jevů $A \in \mathcal{A}$ nastal a který ne. Speciálně, je-li $Y \in \mathbb{L}(\mathcal{A}) = \mathbb{L}(1_A, A \in \mathcal{A})$, pak existuje $h \in \mathbb{L}(\mathcal{B}^{\mathcal{A}})$ taková, že $Y = h(1_A, A \in \mathcal{A})$. Je-li $(\Omega, \mathcal{A})$ měřitelný prostor a $X(\omega) = \omega, \omega \in \Omega$, pak $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelná náhodná veličina, které říkáme ***kanonické náhodná veličina*** na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$. Je-li navíc, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^T$, kde $\emptyset \neq T \subseteq \mathbb{R}$, pak $X$ nazveme také ***kanonickým náhodným procesem***. Proces $X = (X_t, t \in T)$ je pak sestaven z projekcí $X_t(\omega) = \omega_t, t \in T$. Je-li $\omega \in \mathbb{R}^T$, pak $\omega|_t = (\omega_s, s \in T_t)$ značí ***zúžení funcke*** $\omega : T \to \mathbb{R}$ na indexovou množinu $\boldsymbol{T_t} = \{s \in T; s \leq t\}$ všech (časových) indexů do času $t$. Funci $\omega|_t$ budeme také říkat ***funkce*** $\omega$ ***useknutá v čase*** $t \in T$.

Buď $(\Omega, \mathcal{A})$ měřitelný prostor, neklesající systém $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ pod $\sigma$-algeber $\mathcal{A}$ nazveme ***filtrací*** indexovanou indexovou množinou $\emptyset \neq T \subseteq \mathbb{R}$, formálně:

- $s \leq t,\ s, t \in T \ \Rightarrow\ \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{A}$.

***Přirozenou (kanonickou) filtrací*** náhodného procesu $X = (X_t, t \in T)$ s indexovou množinou $\emptyset \neq T \subseteq \mathbb{R}$ a stavovým prostorem $(E, \mathcal{E})$ rozumíme filtraci

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \in T_t) = \sigma(X|_t) = \sigma_{\mathcal{E}^{T_t}}(X|_t) = \{[X|_t \in B], B \in \mathcal{E}^{T_t}\}.$$

Je-li $X_t \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_t), t \in T$, pak říkáme, že proces $X_t$ je ***$\mathcal{F}_t$-adaptovaný*** a píšeme zkráceně $\boldsymbol{X_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)}$. Zřejmě pro reálný proces $X$ platí: $X_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t) \ \equiv\ \mathcal{F}_t^X \subseteq \mathcal{F}_t, t \in T$.
Pokud $Y_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$, pak pro každé $t \in T$ platí $Y_t \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_t^X) = \mathbb{L}(X|_t)$, existuje tedy $h_t \in \mathbb{L}(\mathcal{E}^{T_t})$ taková, že $Y_t = h_t(X|_t)$.

**Poznámka:** Je-li $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ systém $\sigma$-algeber, pak $\mathcal{F} = \cap_{t \in T} \mathcal{F}_t$ je opět $\sigma$-algebra největší taková, že $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_t, t \in T$, formálně $\mathcal{F} = \inf\{\mathcal{F}_t; t \in T\}$ vzhledem ke svazovému uspořádání $\subseteq$ $\sigma$-algeber. Naopak $\mathcal{A} = \cup_{t \in T} \mathcal{F}_t$ je algebra, ale ne obecně $\sigma$-algebra. Symbolem

$$\mathcal{F} = \bigvee_{t \in T} \mathcal{F}_t = \sigma(\bigcup_{t \in T} \mathcal{F}_t) = \sigma(\mathcal{A})$$

označíme nejmenší $\sigma$-algebru obsahující $\mathcal{F}_t, t \in T$ jako podmnožiny. Z hlediska svazového uspořádání můžeme psát $\mathcal{F} = \vee_{t \in T} \mathcal{F}_t = \sup\{\mathcal{F}_t; t \in T\}$, tedy je to nejmenší horní mez.

(1) Je-li $\mathcal{C} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_t, t \in T$, pak zřejmě také $\mathcal{C} \perp\!\!\!\perp \mathcal{A}$ a protože $\mathcal{A}$ je algebra (a tedy uzavřená na konečné průniky), platí $\mathcal{C} \perp\!\!\!\perp \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$.
(2) Podobně: jsou-li $P, Q$ dvě pravděpodobnosti rovnající se na $\mathcal{F}_t, t \in T$, pak $P = Q$ na $\mathcal{A}$, a opět protože $\mathcal{A}$ je algebra (uzavřená na konečné průniky), platí $P = Q$ na $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$.

Buď $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ filtrace na $(\Omega, \mathcal{A})$, označíme

$$\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{s \in T} \mathcal{F}_s, \quad \mathcal{F}_{\infty} = \sigma(\bigcup_{s \in T} \mathcal{F}_s) = \bigvee_{s \in T} \mathcal{F}_s.$$

[1] Zde a dále vypouštíme symbol $\otimes$, který používáme pro součin $\sigma$-algeber, měr a měřitelných a pravděpodobnostních prostorů běžně také používaný při označení příslušných mocninných $\sigma$-algeber a měřitelných prostorů. Zkráceně tedy budeme dále např. psát

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})^2 = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})^{\otimes 2} = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \otimes (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = (\Omega^2, \mathcal{A}^2, \mathbb{P}^2) = (\Omega^2, \mathcal{A}^{\otimes 2}, \mathbb{P}^{\otimes 2}) = (\Omega \times \Omega, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}).$$

Dále

(1) $\quad \boldsymbol{\mathcal{F}_{t+}} = \bigcap_{s\in T_{t+}} \mathcal{F}_s \quad$ pokud $\quad t = \inf T_{t+}, \quad \boldsymbol{\mathcal{F}_{t+}} = \mathcal{F}_t \quad$ jinak, kde $\quad T_{t+} = \{s \in T : s > t\}$

(2) $\quad \boldsymbol{\mathcal{F}_{t-}} = \bigvee_{s\in T_{t-}} \mathcal{F}_s \quad$ pokud $\quad t = \sup T_{t-}, \quad \boldsymbol{\mathcal{F}_{t-}} = \mathcal{F}_t \quad$ jinak, kde $\quad T_{t-} = \{s \in T : s < t\}$.

Pak $\mathcal{F}_{-\infty} \subseteq \mathcal{F}_{t-} \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+} \subseteq \mathcal{F}_\infty$ platí pro každé $t \in T$. Druhý případ v (1) nastává, pokud $t$ je izolovaný se shora v $T$ a druý případ v (2), pokud $t$ je izolovaný v $T$ ze zdola. Řekneme, že ***filtrace*** $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ je ***zleva spojitá***, pokud $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t$ platí pro každé $t \in T$, ***zprava spojitá***, pokud $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ platí pro každé $t \in T$. Filtrace je ***spojitá***, je-li spojitá zleva i zprava. Řekneme, že (reálný) stochastický proces $X = (X_t, t \in T)$ je ***(zleva, zprava) spojitý***, pokud jeho ***trajektorie*** $X(\omega) : t \in T \mapsto X_t(\omega)$ je (zleva, zprava) spojitá funkce.

**Poznámka:** Je-li $T$ lokálně konečná množina[2], pak každé $t \in T$ je izolovaným bodem $T$, a tedy filtrace $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ je spojitá. Je-li reálný proces $X = (X_t, t \geq 0)$ zleva spojitý, pak $\mathcal{F}^X_t$ je zleva spojitá filtrace, neb

$$\mathcal{F}^X_t = \mathcal{F}^X_{t-} \vee \sigma(X_t), \quad \text{a} \quad X_t = \lim_{\mathbb{Q}\ni s\to t-} X_s \in \mathbb{L}(\mathcal{F}^X_{t-}) \quad \text{pro} \quad t > 0.$$

Buď $X$ kanonický proces na $\Omega = \mathbb{C}(\mathbb{R}^+) = \{f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \text{ spojitá }\}$. Pak jeho kanonická filtrace $\mathcal{F}^X_t$ zprava spojitá není, přestože proces $X$ zprava spojitý je. Pro $t > 0$ ukážeme, že platí

$$H = [\limsup_{\mathbb{Q}\ni s\to t+} \tfrac{X_s - X_t}{s-t}] \wedge 1 \in \mathbb{L}(\mathcal{F}^X_{t+}) \backslash \mathbb{L}(\mathcal{F}^X_t).$$

Zřejmě $H \in \mathbb{L}(\mathcal{F}^X_{t+})$. Pokud by $H \in \mathbb{L}(\mathcal{F}^X_t)$, pak by existovala měřitelná funkce $h$ taková, že $H = h(X|_t)$, ale my položíme $\omega^1(s) = (s-t)^+, \omega^2 \equiv 0$. Pak $\omega^1, \omega^2 \in \Omega$, ale $X(s, \omega^1) = 0 = X(s, \omega^2)$ platí pro každé $s \in [0, t]$, což nám dává spor

$$1 = H(\omega^1) = h(X|_t(\omega^1)) = h(X|_t(\omega^2)) = H(\omega^2) = 0.$$

Filtrace $\mathcal{F}^X_t$ tedy není zprava spojitá, přestože proces $X$ ano.

**Cvičení** Buďte $X_k, k \in \mathbb{N}$ nezávislé kladné veličiny s hustotou $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot 1_{[x>0]}$. Položme

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_K, \quad \text{and} \quad N_t = \sum_{k=1}^\infty 1_{[S_k \leq t]}. \tag{3}$$

Ukažte, že $N = (N_t, t \geq 0)$ je zprava spojitý proces startující z $N_0 = 0$ s neklesajícími trajektoriemi nabývající hodnot z $\mathbb{N}_0$ s nezávislými přírůstky $N_t - N_s \sim \mathtt{Po}(\lambda|t-s|)$. Ukažte, že $\mathcal{F}^N_t$ není zleva spojitá filtrace a že $\mathcal{F}^N_t$ je zprava spojitá. Označme $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{F}^N_\infty : \mathbb{P}(A) = 0\}$. Ukažte, že filtrace $\mathcal{F}^N_t \vee \sigma(\mathcal{N})$ je spojitá. Proces $N = (N_t, t \geq 0)$ nazveme ***Poissonovým processem s intenzitou*** $\boldsymbol{\lambda > 0}$.

## 2. Definice - martingaly [(spravdelivě) oceňující, ohodnocující proces ]

Buď $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ filtrace na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Řekneme, že integrovatelný proces $X_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$ je ***$\mathcal{F}_t$-martingal***, pokud $X_s \overset{\text{sj}}{=} E[X_t|\mathcal{F}_s]$, ***$\mathcal{F}_t$-submartingal***, pokud $X_s \overset{\text{sj}}{\leq} E[X_t|\mathcal{F}_s]$ a ***$\mathcal{F}_t$-supermatingal***, pokud $X_s \overset{\text{sj}}{\geq} E[X_t|\mathcal{F}_s]$ - kdykoli $s \leq t$ pro $s, t \in T$.

**Interpretace** Pro $\mathcal{F}_t$-martingal a $s \leq t$ z $T$ požadujeme $X_s \overset{\text{sj}}{=} E[X_t|\mathcal{F}_s]$, což interpretujeme tak, že $X_s$ je (spravedlivým) věrným $\mathcal{F}_s$-odhadem veličiny $X_t$. Hodnota procesu $X_s$ tak poskytuje stochasticky vyvážený $\mathcal{F}_s$-měřitelný odhad budoucích hodnot procesu $X$. Proces $X_t$ jako $\mathcal{F}_t$-martingal se pak používá k modelování (spravedlivého) věrného ocenění (ohodnocení) očekávaných finačních toků. Tato interpretace plně podpovídá případu, kdy existuje veličina $X_\infty \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_\infty)$ taková, že $X_t \overset{\text{sj}}{=} E[X_\infty|\mathcal{F}_t], t \in T$. V této souvislosti je také užitečná představa procesu $X$ jako (věrně, nestranně) střílejícího procesu a veličiny $X_\infty$ jako odpovídajícího cíle. Obecně si lze martingal předstvovat jako stochasticky vyvážený hledající proces. Ve výše uvedeném případě pak lze říci, že cíl $X_\infty \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_\infty)$ je nalezen. Pokud taková veličina neexistuje, pak lze opět interpretovat martingal jako hledající proces, přičemž odpovídající cíl neexistuje. To souvisí s explozivním charakterem martingalu v takovém případě vycházející z postupného rozčilení, že to, co hledá neexistuje. Následkem takového rozčilení martingalu může být to, že v limitě (po explozi) ztratí svou úroveň $EX_s = EX_t$, kterou si ze své podstaty v konečných deterministických časech zachovává.

Po $\mathcal{F}_t$-submartingalu pro $s \leq t$ z $T$ požadujeme $X_s \overset{\text{sj}}{\leq} E[X_t|\mathcal{F}_s]$, což znamená, že veličina $X_s$ je dolním $\mathcal{F}_s$-měřitelným odhadem budoucích hodnot procesu $X_t$. Bereme-li proces $X$ jako odhad budoucích hodnot, pak

[2] Tj. $(a, b) \cap T$ je konečná množina pro každé $a < b$.

tento proces budoucí hodnoty (sub=pod) podhodnocuje (podceňuje) popř. podstřeluje. Opět jako speciální případ můžeme uvažovat situaci, kdy existuje veličina $X_\infty \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_\infty)$ taková, že $X_t \overset{sj}{\le} E[X_\infty|\mathcal{F}_t], t \in T$. V takovém případě proces $X_t$ svůj cíl opět zasáhne. V tomto případě si můžeme představovat, že je to proces, který svůj cíl nadhání spíše zespoda a očekává, že jej nalezne spíše nahoře. V případě, že uvedená cílová veličina neexistuje, interpretujeme to tak, že cíl, který proces hledal, neexistuje, což se opět může projevit poklesem úrovně procesu $X_t, t \in T$ po explozi (v nekonečnu), přestože je jeho úroveň $EX_t, t \in T$ neklesá.

Analogicky po $\mathcal{F}_t$-supermartingalu pro $s \le t$ z $T$ požadujeme $X_s \overset{sj}{\ge} E[X_t|\mathcal{F}_s]$, což znamená, že veličina $X_s$ je horním $\mathcal{F}_s$-měřitelným odhadem budoucích hodnot procesu $X_t$. Bereme-li opět proces $X$ jako odhad budoucích hodnot, pak tento proces budoucí hodnoty naopak (super=nad) nadhodnocuje (přeceňuje) popř. přestřeluje. Zde ponechvám čtenáři k analogickému doplnění případy, kdy existuje cíl, který proces z principu přestřeluje a kdy hledaný cíl neexistuje, a proto proces po explozi svou nerostoucí úroveň může $EX_t, t \in T$ povznést. Za poznámku už jen stojí poznamenat, že slovo ,,super" zde neznamená: že proces nejspíše půjde nahoru, ale naopak. Super zde znamená (bezmezný) optimismus, který je budoucím vývojem krocen, což se projevuje v možném poklesu jeho úrovně. Naopak submartingal jako podhodnocující proces se vymezuje opatrností proti pádu a tím získává potenciál k růstu, což se projevuje v jeho neklesající úrovni. O martingalu pak lze říci, že je to proces, který kráčí (zlatým) středem.

**Lemma 1** Nechť $\emptyset \ne T \subseteq \mathbb{R}$ je lokálně konečná množina a $X_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$ je integrovatelný proces indexovaný $T$. Pak $X_t$ je $\mathcal{F}_t$-martingal (super/sub) právě tehdy, když

$$\forall\ s,t \in T \quad s<t \quad (s,t)\cap T = \emptyset \quad \Rightarrow \quad X_s \overset{sj}{=} E[X_t|\mathcal{F}_s] \qquad (\overset{sj}{\ge},\ \overset{sj}{\le}). \tag{4}$$

Pokud $(s,t)\cap T = \emptyset$, říkáme, že body $s,t \in T$ jsou ***sousedé***.

**Důkaz:** Je-li proces $X_t$ $\mathcal{F}_t$-martingal (super/sub), pak (4) platí z definice ($\overset{sj}{\ge}$, $\overset{sj}{\le}$). Platí-li naopak (4), pak platí $V(0)$, kde

$$V(n): \quad \forall s,t \in T \quad s<t \quad \mathrm{card}(s,t)\cap T = n \quad \Rightarrow \quad X_s \overset{sj}{=} E[X_t|\mathcal{F}_s] \qquad (\overset{sj}{\ge},\ \overset{sj}{\le}).$$

Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$. Indukcí ukážeme, že platí $V(n)$ za přepodkladu, že platí $V(k)$ pro $k < n$. Nechť $\mathrm{card}(s,t)\cap T = n \in \mathbb{N}$. Existuje tedy $r \in (s,t)\cap T$, pak $n_1 = \mathrm{card}(s,r)\cap T < n$ a $n_2 = \mathrm{card}(r,t)\cap T < n$. Z indukčního předpokladu platnosti $V(n_1), V(n_2)$ pak dostáváme (ne)rovnost

$$X_s \overset{sj}{=} E[X_r|\mathcal{F}_s] \overset{sj}{=} E[E(X_t|\mathcal{F}_r)|\mathcal{F}_s] \overset{sj}{=} E[X_t|\mathcal{F}_s] \qquad (\overset{sj}{\ge},\ \overset{sj}{\le}).$$

***Q.E.D.***

**Poznámka:** Martingal má konstantní střední hodnotu, submartingal neklesající a supermartingal nerostoucí.

**Lemma 2** Nechť $X_t$ je $\mathcal{F}_t$-super/sub-martingal. Je-li $EX_t$ konstantní, pak $X_t$ je $\mathcal{F}_t$-martingal.

**Důkaz:** Pro submartingal. Buďte $s,t \in T$ a $s<t$, pak $Y = E[X_t|\mathcal{F}_s] - X_s \overset{sj}{\ge} 0$ a $EY = EX_t - EX_s = 0$. Pak nutně $Y \overset{sj}{=} 0$, tj. $X_s \overset{sj}{=} E[X_t|\mathcal{F}_s]$.

***Q.E.D.***

**Lemma 3** Nechť proces $X = (X_t, t \in T)$ je $\mathcal{F}_t$-martingal (super, sub). Je-li filtrace $(\mathcal{G}_t, t \in T)$ sevřená mezi $\mathcal{F}_t^X \subseteq \mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t$, pak proces $X$ je také $\mathcal{G}_t$-martingal (super, sub).

**Důkaz:** Z předpokladů plyne, že $X_t \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_t^X) \subseteq \mathbb{L}_1(\mathcal{G}_t), t \in T$. Jinak buďte $s,t \in T$ takové, že $s<t$. Pak protože $\mathcal{G}_s \subseteq \mathcal{F}_s$ a $X_s \in \mathbb{L}_1(\mathcal{G}_s)$, platí

$$E[X_t|\mathcal{G}_s] \overset{sj}{=} E[E(X_t|\mathcal{F}_s)|\mathcal{G}_s] \overset{sj}{=} E[X_s|\mathcal{G}_s] \overset{sj}{=} X_s \qquad (\overset{sj}{\le},\ \overset{sj}{\ge}).$$

***Q.E.D.***

Řekneme, že proces $X = (X_t, t \in T)$ je ***martingal (supermartingal, submartingal)***, je-li $\mathcal{F}_t^X$-martingal (super/sub). Ekvivalentně je proces martingal (super/sub), je-li vzhledem k nějaké filtraci, přičemž vždy lze uvažovat kanonickou.

**Příklady**: (1) Nechť $X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené integrovatelné veličiny, pak odpovídající náhodná procházka $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ je martingal právě tehdy, když $EX_1 = 0$.

(2) Buď $\mathbb{S}_n = S_n - ES_n = S_n - nEX_1$ centrovaná náhodná procházka s krokem $\mathbb{X}_n = \mathbb{S}_n - \mathbb{S}_{n-1} \in \mathbb{L}_2$. Pak proces $V_n = \mathbb{S}_n^2 - E\mathbb{S}_n^2 = \mathbb{S}_n^2 - n\mathrm{var}(X_1)$ je $\mathcal{F}_n^X$-martingal, kde $\mathcal{F}_n^X = \mathcal{F}_n^S = \mathcal{F}_n^{\mathbb{S}} = \mathcal{F}_n^{\mathbb{X}} \supseteq \mathcal{F}_n^V$.
(3) Proces $\mathcal{E}_n = \exp\{\alpha S_n - \beta n\}$ je martingal právě tehdy, když $E\mathcal{E}_n = 1, n \in \mathbb{N}$.

(1*) Buď $N_t$ Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$. Pak proces $M_t = N_t - EN_t = N_t - \lambda t$ je martingal.
(2*) Proces $V_t = M_t^2 - EM_t^2 = M_t - \lambda t$ je $\mathcal{F}_t^N$-martingal, kde $\mathcal{F}_t^N = \mathcal{F}_t^M \supseteq \mathcal{F}_t^V$.[3]
(3*) $\mathcal{E}_t = \exp\{\alpha N_t - \beta t\}$ je martingal právě tehdy, když $E\mathcal{E}_t = 1, t \geq 0$.

Proces $W = (W_t, t \geq 0)$ se nazývá ***Wienerův***, pokud
(a) $W_0 = 0$ a jeho trajektorie $W(\omega) = (W_t(\omega), t \geq 0)$ jsou spojité
(b) $W|_t \perp\!\!\!\perp W_t - W_s \sim N(0, t-s)$ pro $0 \leq s \leq t$.
Ekvivalentně je proces $W$ Wienerův, pokud splňuje (a) a pokud (b') je centrovaný Gausovský proces s autokovariancí $\mathrm{cov}(W_s, W_t) = s \wedge t$ pro $s, t \geq 0$.
(1') Wienerův proces $W_t$ je martingal.
(2') $V_t = W_t^2 - t$ je $\mathcal{F}_t^W$-martingal.
(3') $\mathcal{E}_t = \exp\{\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\}$ je martingal.
V bodech (3),(3*),(3') lze také uvažovat $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$ komplexní.

**Příklad** Nechť $Y \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ a $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ je filtrace na $(\Omega, \mathcal{A})$. Pak proces $Y_t = E[Y|\mathcal{F}_t], t \in T$ je $\mathcal{F}_t$-martingal a dle následujícího lemmatu je tento proces stejnoměrně integrovatelný. Později uvidíme, že přesně takto vypadá každý stejnoměrně integrovatelný martingal.

**Lemma 4** Nechť $Y \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, pak systém veličin

$$(E^{\mathcal{F}} Y = E[Y|\mathcal{F}]; \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \ \sigma\text{-algebra})$$

je stejnoměrně integrovatelný.

**Důkaz:** Označme pro integrovatelnou veličinu $X \in \mathbb{L}_1$ její zbytek po integraci

$$I_k(X) = E[|X| \cdot 1_{[|X| \geq k]}] \to 0 \quad \text{pro} \quad k \to \infty$$

a připomeňme, že proces $X = (X_t, t \in T) \in \mathbb{L}_1^T$ je stejnoměrně integrovatelný právě tehdy, když

$$\sup_{t \in T} I_k(X_t) \to 0, \quad k \to \infty.$$

Dále poznamenejme, že pro dominanci veličin $|X_1| \overset{\text{sj}}{\leq} X_2$ platí $I_k(X_1) \leq I_k(X_2), k \in \mathbb{N}$. Z důsledku Jensenovy nerovnosti $|E^{\mathcal{F}} Y| \overset{\text{sj}}{\leq} E^{\mathcal{F}}|Y|$ pro podmíněnou střední hodnotu pak tedy dostáváme nerovnost

$$I_k(E^{\mathcal{F}} Y) \leq I_k(E^{\mathcal{F}}|Y|) = E[E^{\mathcal{F}}|Y| \cdot 1_{A_k(\mathcal{F})}] = E[|Y| \cdot 1_{A_k(\mathcal{F})}],$$

kde množina $A_k(\mathcal{F}) = [E^{\mathcal{F}}|Y| \geq k]$ má pravděpodobnost

$$P[A_k(\mathcal{F})] \leq \tfrac{1}{k} EE^{\mathcal{F}}|Y| = \tfrac{1}{k} E|Y|.$$

Celkem tak dostáváme nerovnost

$$I_k(E^{\mathcal{F}} Y) \leq \sup\{E[|Y| 1_A]; P(A) \leq \tfrac{1}{k} E|Y|\} \to 0, \quad k \to \infty$$

stejnoměrně vzhledem k $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$. ***Q.E.D.***

**Důsledek:** Je-li $Y \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ filtrace na $(\Omega, \mathcal{A})$, pak

$$Y_t = E[Y|\mathcal{F}_t], \quad t \in T$$

je ***stejnoměrně integrovatelný $\mathcal{F}_t$-martingal***.

**Tvrzení 1** Nechť $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ a $(\mathcal{G}_t, t \in T)$ jsou nezávislé filtrace, tj. $\mathcal{F}_\infty$ a $\mathcal{G}_\infty$ jsou nezávislé $\sigma$-algebry. Je-li $X_t$ $\mathcal{F}_t$-martingal (super/sub), pak je také $\mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_t$-martingal (super/sub).

[3] Zde platí $\mathcal{F}_t^M = \mathcal{F}_t^{|M|} = \mathcal{F}_t^{M^2} = \mathcal{F}_t^V$,

**Důkaz:** Buďte $(s,t) \in T^{(2)}, F \in \mathcal{F}_s, G \in \mathcal{G}_s$. Pak z nezávislosti $G \in \mathcal{G}_\infty \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_\infty \supseteq \sigma(1_F, E[X_t|\mathcal{F}_s], X_t)$ dostaneme, že[4]

$$\begin{aligned}\int_{F\cap G} E[X_t|\mathcal{F}_s]\,\mathrm{d}P &= E[1_G \cdot 1_F E[X_t|\mathcal{F}_s]] = P(G)\cdot \int_F E[X|\mathcal{F}]\,\mathrm{d}P = P(G)\int_F X_t\,\mathrm{d}P\\ &= P(G)\cdot E[X_t 1_F] = E[1_G \cdot X_t 1_F] = \int_{F\cap G} X_t\,\mathrm{d}P.\end{aligned}$$

Ověřili jsme tedy stabilitu

$$\int_H X_t\,\mathrm{d}P = \int_H E[X_t|\mathcal{F}_t]\,\mathrm{d}P \tag{5}$$

pro množiny $H \in \mathcal{H} = \{F \cap G : F \in \mathcal{F}_s, G \in \mathcal{G}_s\} \ni \Omega$ tvořící systém uzavřený na konečné průniky. Protože množina všech $H \in \mathcal{F}_s \vee \mathcal{G}_s$ vyhovující (5) tvoří Dynkinův systém, platí rovnost (5) pro každé $H \in \sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{F}_s \vee \mathcal{G}_s$. Protože $E[X_t|\mathcal{F}_s] \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_s) \subseteq \mathbb{L}(\mathcal{F}_s \vee \mathcal{G}_s)$, platí

$$E[X_t|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{=} E[X_t|\mathcal{F}_s \vee \mathcal{G}_s] \overset{\text{sj}}{=} X_s.$$

***Q.E.D.***

**Tvrzení 2** Nechť $X_t, t \in T$ je $\mathcal{F}_t$-martingal nábývajících skoro jistě hodnot v množině $D \subseteq \mathbb{R}$. Je-li $g : D \to \mathbb{R}$ konvexní funkce taková, že $g(X_t) \in \mathbb{L}_1$, tj. je-li $g(X_t)$ integrovatelný proces, pak $g(X_t)$ je $\mathcal{F}_t$-submartingal.

**Důkaz:** Použitím Jensenovy nerovnosti pro podmíněnou střední hodnotu dostaneme, že

$$E[g(X_t)|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{\geq} g(E[X_t|\mathcal{F}_s]) \overset{\text{sj}}{=} g(X_s), \quad (s,t) \in T^{(2)}.$$

***Q.E.D.***

**Poznámka:** Jensenova nerovnost pro podmíněnou střední hodnotu platí pro konvexní funkci na konvexní podmnožině v $\mathbb{R}^k$. Stačí uvažovat podmíněnou střední hodnotu jako střední hodnotu vůči podmíněnému rozdělení na $\mathbb{R}^k$, které vždy exisuje, neboť $\mathbb{R}^k$ je separabilní metrický prostor.

**Tvrzení 3** Nechť $X_t, t \in T$ je $\mathcal{F}_t$-submartingal s hodnotami skoro jistě v konvexní množině $D \subseteq \mathbb{R}$ a $g : D \to \mathbb{R}$ neklesající konvexní. Je-li proces $g(X_t)$ integrovatelný, pak je to $\mathcal{F}_t$-submartingal.

**Důkaz:** Použitím Jensenovy nerovnosti pro podmíněnou střední hodnotu dostaneme, že

$$E[g(X_t)|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{\geq} g(E[X_t|\mathcal{F}_s]) \overset{\text{sj}}{\geq} g(X_s), \quad (s,t) \in T^{(2)}.$$

***Q.E.D.***

---

[4]Od nyní budeme používat následující značení $T^{(k)} = \{t \in T^k; t_1 < \cdots < t_k\}$ pro množinu všech rostoucích posloupností délky $k \in \mathbb{N}$ nabývajících hodnot v množine $T$. Pro snadnější přietí tohoto značení zde uvedeme i odpovídající odůvodnění. Symbolem $A^B = \{f : B \to A\}$ v teorii množin označujeme množinu všech zobrazení z $B$ do $A$. Výhodou tohoto značení je umožňění formálního přípstupu k výpočtu její kardinality $|A^B| = |A|^{|B|}$. Dále připomenenme, že v teorii množin definujeme $0 = \emptyset = \{\}$ což je prototyp 0-prvkové množiny (a také jediná taková množina), dále $1 = \{0\} = \{\emptyset\} = \{\{\}\}$, což je prototyp 1-prvkové množiny a nakonec $2 = \{0,1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\{\}, \{\{\}\}\}$ jako prototyp dvouprvkové množiny. Pak tedy $A^2 = A^{\{0,1\}}$ je množina všech zobrazení z dvouprvkové množiny $2 = \{0,1\}$ do $A$ a tuto množinu ztotožňujeme s kartézským součinem $A \times A = A^2 = \{(a,b); A, b \in A\}$, což vnímáme jako množinu všech uspořádaných dvojic $(a,b) = \{a, \{a,b\}\}$ množiny $A$. Podobně $A^k$ ztotožňujeme s $k$-násobným kartézským součinem $A \times \ldots \times A$, pro $k \in \mathbb{N}$. Dále připomeneme, že množinou všech $k$-prvkových podmnožin množiny $A$ značíme $\binom{A}{k}$. Pomocí kombinací lze ověřit, že počet prvků odpovídá čistě formálními zápisu

$$|\tbinom{A}{k}| = \tbinom{|A|}{k}.$$

Podobně jako kombinace můžeme modelovat pomocí $k$-prvkových podmnožin, můžeme variace množiny $A$ modelovat pomocí prostých posloupností. Symbolem $A^{[B]} = \{f \in A^B : f \text{ je prostá }\}$ pak definujeme množinu všech prostých zobrazení z množiny $B$ do množiny $A$. Je-li $|B| = k \in \mathbb{N}$, pak $|A^B| = |A|^{[|B|]}$, kde využíváme označení $x^{[k]}$ pro $k$-tou (sestupnou) faktoriální mocninu

$$x^{[k]} = \prod_{j=0}^{k-1}(x-j) = x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-k+1).$$

Zajímáme-li se o uspořádané prosté posloupnosti ve smyslu rostoucí či klesající, pak se nabízí nabízené značení

$$A^{(B)} = \{f : B \to A; f \text{ rostoucí }\},$$

které má zejména tu výhodu, že počet prvků opět můžeme spočíst čistě formálně

$$|A^{(k)}| = |\tbinom{A}{k}| = \tbinom{|A|}{k} = \tfrac{|A|^{[k]}}{k!},$$

kdy se množina $A$ jakoby vyhoupne do závorek () nad číslo $k$.

## 3. Kompenzátory

Buď $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ filtrace. Označme

$$\boldsymbol{\mathcal{F}_{t\uparrow}} = \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{-\infty}, \qquad \text{pokud } t = \min T$$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}_{t\uparrow}} = \bigvee_{s \in T_{t-}} \mathcal{F}_s = \sigma(\mathcal{F}_s; s \in T_{t-}), \qquad \text{pokud } t > \inf T.$$

Pak $(\mathcal{F}_{t\uparrow}, t \in T)$ je filtrace a my jí budeme říkat ***prediktabilní filtrace*** k filtraci $\mathcal{F}_t$ (či prediktabilní filtrace filtrace $\mathcal{F}_t$). Proces $H_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_{t\uparrow})$ adaptovaný na prediktabilní filtraci budeme nazývat $\mathcal{F}_t$-predikovatelný (prediktabilní) proces.[5]

**Příklady:** a) $T = \mathbb{N}_0$, pak $\mathcal{F}_{0\uparrow} = \mathcal{F}_0$ a pro $n \in \mathbb{N}$ platí $\mathcal{F}_{n\uparrow} = \mathcal{F}_{n-1}$. Proces $H$ je pak $\mathcal{F}_n$-predikovatelný právě tehdy, když je předvídatelný o krok dopředu, tj. $H_0 \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_0), H_n \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_{n-1}), n \in \mathbb{N}$.

Predikabilní proces si můžeme představit jako proces, kterým modelujeme naši investiční strategii. Pomocí adaptovaných procesů které nemusí být predikovatelné naopak modelujeme vnější vlivy, které nás bezprostředně ovlivňují. Buď $F_n \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_n)$ cena futures kontraktu v čase $n \in \mathbb{N}_0$, tj. proces $F_n \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_n)$ je $\mathcal{F}_n$-pozorovatelný a $H_n \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_{n-1})$ pro $n \in \mathbb{N}$ bude představovat množství uzavřených futures kontraktů pro časový interval $(n-1, n)$. Na tomto intervalu se cena futures změní o hodnotu $\Delta F_n = F_n - F_{n-1}$ a my si pak na svůj účet můžeme připsat hodnotu

$$H_n(F_n - F_{n-1}) = H_n \cdot \Delta F_n,$$

což se dá interpretovat tak, že jsme na hru o výplatě $\Delta F_n = F_n - F_{n-1}$ sadilli sázku o velikosti $H_n$, kterou jsme ovšem museli stanovit před započetím hry již v čase $n-1$ pro $n \in \mathbb{N}$.[6] Celková naše výhra v čase $m \in \mathbb{N}$ pak bude činit

$$V_m = \sum_{n=1}^{m} H_n \cdot \Delta F_n = \sum_{n=1}^{m} H_n(F_n - F_{n-1}),$$

což je diskrétní analogie stochastického integrálu zaváděného v přednášce stochstická analýza. Na závěr jen opět připomeňme, že inegrované procesy $H_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_{t\uparrow})$ představují (intervenční) investiční (predikovatelné) strategie a procesy $F_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$, podle kterých se integruje, naopak představyjí často cenu akcie (zboží), měnový kurs či cenu futures a ty reprezentují (více či méně předvídatelné) vnější vlivy.

b) Je-li $X = (X_t, t \geq 0)$ zleva spojitý proces, je také $\mathcal{F}_t^X$-predikovatelný. Zřejmě $X_0 \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_0^X) = \mathbb{L}(\mathcal{F}_{0\uparrow}^X)$,

$$X_t = \lim_{\mathbb{Q} \ni s \to t-} X_s \in \mathbb{L}(X_s, s < t) = \mathbb{L}(\mathcal{F}_{t-}^X) = \mathbb{L}(\mathcal{F}_{t\uparrow}^X), \quad t > 0,$$

neboť dle definice platí $\mathcal{F}_{t\uparrow}^X = \mathcal{F}_{t-}^X$ pro $t > 0$. Zleva spojité procesy jsou tedy vhodnými kandidáty proto, aby se daly stochasticky integrovat.

c) Je-li $N_t = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{[S_k \leq t]}$ Poissonův proces, pak $N_t$ není $\mathcal{F}_t$-predikovatelný proces. Ukážeme, že existuje $t > 0$ takové, že

$$N_t \notin \mathbb{L}(N_s, s < t) = \mathbb{L}(\mathcal{F}_{t-}^N) = \mathbb{L}(\mathcal{F}_{t\uparrow}^N).$$

Buď $\omega^1 \in \Omega$ libovolné a položme $t = S_1(\omega) > 0$. Pak $P(N_t = 0) > 0$, a tedy existuje $\omega^2 \in [N_t = 0]$. Pak $N_s(\omega^1) = 0 = N_2(\omega^2)$ platí pro $s < t$, ale $N_t(\omega^1) = 1 \neq 0 = N_1(\omega^2)$. Tedy $N_t \notin \mathbb{L}(N_s, s < t)$ a dokonce $N_t$ není žádnou (ani neměřitelnou) funkcí $(N_s, s < t)$.

Poissonův proces se používá k modelování vnějších značně nepředvídatelných událostí jako jsou pojistné události $S_n, n \in \mathbb{N}$ či doby poruchy přístroje způsobené obtížně předvídatelnou poruchou jednoduché součástky jako je např. žárovka s exponenciální dobou dožití. Tento proces se zjevně nedá použít pro modelování naší strategie. Dovedeno do absurdna bychom pak pojistnou smlouvu uzavřeli až v čase, kdy pojistná událost nastane s ohledem na velikost pojistné škody, což popírá základní principy pojistění.

Buď $X_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$. Řekneme, že proces $\mathcal{F}_t$-predikovatelný proces $K_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_{t\uparrow})$ je ***$\mathcal{F}_t$-kompenzátor***em procesu $X$, pokud proces $M_t = X_t - K_t$ je $\mathcal{F}_t$-martingal.

---

[5] Pro $(s, t, r) \in T^{(3)}$ pak platí

$$\mathcal{F}_{-\infty} \subseteq \mathcal{F}_{s\uparrow} \subseteq \mathcal{F}_{s-} \subseteq \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_{s+} \subseteq \mathcal{F}_{t\uparrow} \subseteq \mathcal{F}_{t-} \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+} \subseteq \mathcal{F}_{r\uparrow} \subseteq \mathcal{F}_{r-} \subseteq \mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{F}_{r+} \subseteq \mathcal{F}_{\infty}.$$

Čtenář nechť si položí otázku, v jakých případech uvedené inkluze mohou mít podobu rovností.

[6] Hodnota $H_0$ je v tomto přípdadě naprosto nepodstatná.

**Poznámka:** Buď $W = (W_t, t \geq 0)$ Wienerův proces. To je zřejmě martingal a také zleva spojitý proces, tedy predikovatelný vzhledem ke kanonické filtraci. Pak jeho kompenzátorem je opět jakýkoli $\mathcal{F}_t^W$-martingal a pojem kompenzátoru vzhledem k takovéto filtraci nemá valný význam. Je to dáno mj. vlastností kanonické filtrace Wienerova procesu, kde každý $\mathcal{F}_t^W$-martingal má spojitou modifikaci[7] a je to pak téměř predikovatelný proces.

Naopak, je-li $T = \mathbb{N}_0$, pak takový netriviální příklad predikovatelného martingalu neexistuje a to stojí v pozadí následujícího tvrzení, které ukazuje, jak takový kompenzátor vypadá.

**Tvrzení 4** Buď $X = (X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ $\mathcal{F}_n$-adaptovaný integrovatelný proces. Pak $\mathcal{F}_n$-predikovatelný proces $K_n$ je $\mathcal{F}_n$-kompenzátorem procesu $X$ právě tehdy, když

$$K_n \overset{\text{sj}}{=} K_0 + \sum_{k=1}^{n} E[X_k - X_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}], \qquad \text{kde} \qquad K_0 \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_0). \tag{6}$$

**Důkaz:** Nechť $K_n$ je $\mathcal{F}_n$-kompenzátor procesu $X_n$. Pak $M_n = X_n - K_n$ je $\mathcal{F}_n$-martingal. Platí tedy

$$0 \overset{\text{sj}}{=} E[M_n - M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \overset{\text{sj}}{=} E[X_n - X_{n-1} - (K_n - K_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}] \overset{\text{sj}}{=} E[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] - (K_n - K_{n-1}),$$

neboť $K_n, K_{n-1} \in \mathcal{F}_{n\uparrow} = \mathcal{F}_{n-1}$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dále $X_0 - M_0 \overset{\text{sj}}{=} K_0 \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_0)$ musí být integrovatelná veličina, neboť $X_0, M_0 \in \mathbb{L}_1$. Nasčítáním pak dostaneme

$$K_n = K_0 + \sum_{k=1}^{n} (K_k - K_{k-1}) \overset{\text{sj}}{=} K_0 + \sum_{k=1}^{n} E[X_k - X_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}].$$

Naopak proces $K_n$ definovaný rovností (6 - všude) je $\mathcal{F}_n$-predikovatelný, což lze ověřit indukcí s pomocí

$$\Delta K_k = K_k - K_{k-1} = E[X_k - X_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}] \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Pak $M_n = X_n - K_n \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$ a

$$E[M_n - M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \overset{\text{sj}}{=} E[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] - \Delta K_n \overset{\text{sj}}{=} 0.$$

Tedy proces $M_n = X_n - K_n$ je $\mathcal{F}_n$-martingal. ***Q.E.D.***

**Příklady** a) Nechť $S_n$ je integrovatelná náhodná procházka s krokem $X_n = \Delta S_n = S_n - S_{n-1} \in \mathbb{L}_1$. Pak její kompenzátor pro $T = \mathbb{N}_0$ je tvaru $K_0 + nEX_1$, kde $K_0 \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_0^S) = \mathbb{L}(\{\emptyset, \Omega\}) \equiv \mathbb{R}$.

b) Je-li $\mathbb{S}_n = S_n - ES_n$ centrovaná náhodná procházka s krokem $\mathbb{X}_n = \Delta\mathbb{S}_n = \mathbb{S}_n - \mathbb{S}_{n-1} \in \mathbb{L}_2$, pak $\mathbb{S}_n^2$ je $\mathcal{F}_n$-submartingal s $\mathcal{F}_n^{\mathbb{S}}$-kompenzátorem ve tvaru $K_0 + n\sigma^2$, kde $K_0 \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 = \text{var}(\mathbb{X}_1) = E\mathbb{X}_1^2$.

c) Je-li $N_t$ Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$, pak má např. kompenzátor $K_t = K_0 + \lambda t$, kde $K_0 \in \mathbb{R}$.

**Poznámka:** Integrovatelný $\mathcal{F}_n$-adaptovaný proces $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ je $\mathcal{F}_n$-martingal (super/sub) právě tehdy, když jeho $\mathcal{F}_n$-kompenzátor je skoro jistě konstatní (nerostoucí, neklesající), tj.

$$0 \overset{\text{sj}}{=} E[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \overset{\text{sj}}{=} \Delta K_n \quad (\overset{\text{sj}}{\geq}, \overset{\text{sj}}{\leq}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Tvrzení 5** Buď $X > 0$ reálná náhondá veličina a $N_t = 1_{[X \leq t]}$ její (jednobodový) čítačí proces. Označme

$$H_t = \int_0^t \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{P(X \geq x)} = \int_{(0,t]} \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{P(X \geq x)}.$$

Pak příkladem $\mathcal{F}_t^N$-kompenzátoru procesu $N_t$ je proces tvaru $K_t = K_0 + H(t \wedge X)$, kde $K_0 \in \mathbb{R}$.

**Důkaz:** Zřejmě $X_t = t \wedge X$ je zleva spojitý $\mathcal{F}_t^N = \sigma([X \leq s]; s \leq t)$-adaptovaný proces. Je tedy $\mathcal{F}_t$-predikovatelný a stejně tak jeho borelovská transforamce $H(t \wedge X)$. Označme $M_t = N_t - H_{t\wedge X}$. Ukážeme, že proces $M_t$ je $\mathcal{F}_t^N$-martingal. Nejprve ukážeme, že má konstantní (nulovou) střední hodnotu. Zřejmě

$$EN_t = P(X \leq t) = F_X(t) = \int_{x\in(0,t]} \frac{P(X\geq x)}{P(X\geq x)} \mathrm{d}F_X(x) = \int_{x\in(0,t]} \int_{y\in[x,\infty)} \mathrm{d}F_X(y) \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{P(X\geq x)} \tag{7}$$

Použitím Fubiniho věty dostaneme, že (7) je rovno

$$\int_{y\in(0,\infty)} \int_{x\in(0,t\wedge y]} \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{P(X\geq x)} \mathrm{d}F_X(y) = \int_{y\in(0,\infty)} H_{t\wedge y} \mathrm{d}F_X(y) = EH_{t\wedge X}.$$

[7]Proces $X = (X_t, t \in T)$ je ***modifikací*** procesu $Y = (Y_t, t \in T)$, pokud $X_t \overset{\text{sj}}{=} Y_t, t \in T$, což je třeba odlišovat od $(X_t, t \in T) \overset{\text{sj}}{=} (Y_t, t \in T)$, čož komentujeme tím, že proces $X$ je ***verzí*** procesu $Y$. Tyto pojmy se shodují např. jsou-li procesy $X, Y$ reálné a spojité zleva či zprava na $T \subseteq \mathbb{R}$.

Zvolme nyní $(s,t) \in [0,\infty)^{(2)}$. Pak zřejmě

$$E[N_t - N_s | X > s] = P(X \le t | X > s) = \frac{P(s<X\le t)}{P(X>s)} = \frac{F_X(t)-F_X(s)}{P(X>s)} = \frac{EH_{t\wedge X} - EH_{s\wedge X}}{P(X>s)} = E[H_{t\wedge X} - H_{s\wedge X} | X > s].$$

Platí tedy $E[M_t - M_s | X > s] = 0$. Protože množina $[X > s]$ je atom $\sigma$-algebry, platí

$$E[M_t - M_s | \mathcal{F}_s^N] \overset{\text{sj}}{=} 0 \quad \text{na množině} \quad [X > s].$$

Na množině $[X \le s]$ naopak platí

$$N_t - N_s = 1_{[s<X\le t]} = 0, \quad H_{t\wedge X} - H_{s\wedge X} = H_X - H_X = 0, \quad \Rightarrow \quad M_t - M_s = 0.$$

Pro každé $(s,t) \in [0,\infty)^{(2)}$ tak platí $E[M_t - M_s | \mathcal{F}_s^N] \overset{\text{sj}}{=} 0$. ***Q.E.D.***

## 4. Markovský čas (pozorovatelná událost)

Nechť $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ je filtrace. Řekneme, že $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$ je ***$\mathcal{F}_t$-markovský čas***, ozn. ***$\tau \in$ MČ$(\mathcal{F}_t)$***, pokud $[\tau \le t] \in \mathcal{F}_t$ platí pro každé $t \in T$. Ekvivalentně $\tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t) \equiv 1_{[\tau\le t]} \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$, což znamená, že čas $\tau$ je markovský právě tehdy, když jeho (jednobodový) čítací proces $1_{[\tau\le t]}$ je průběžně pozorovatelný na základě filtrace $\mathcal{F}_t$.

**Poznámka:** Buď $T \subseteq \mathbb{R}$. Řekneme, že podmnožina $S \subseteq T$ je

$$\textbf{\textit{hustá zleva}}, \quad \text{pokud} \quad \forall\, t \in T\backslash S \;\; \exists s_n \in S \uparrow t, \quad n \to \infty$$
$$\textbf{\textit{hustá zprava}}, \quad \text{pokud} \quad \forall\, t \in T\backslash S \;\; \exists s_n \in S \downarrow t, \quad n \to \infty.$$

Označme ***$T_+$*** množinu včech bodů $t \in T$ izolovaných zprava a ***$T_-$*** zleva. Tyto množiny jsou zřejmě spočetné. Je-li $S \subseteq T$ hustá zprava, pak nutně $T_+ \subseteq S$ a podobně, je-li hustá zleva, pak $T_- \subseteq S$. Pak zřejmě spočetnou podmnožinu hustou zprava či zleva získáme právě jako sjednocení nějaké husté podmnožiny v $T$ a množiny $T_+$ resp. $T_-$. Sjednocením obou takových množin můžeme v případě potřeby dostat tzv. oboustranně hustou spočetnou podmnožinu.

**Lemma 5** (i) Je-li $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$ $\mathcal{F}_t$-markovský čas, pak $[\tau = t] \in \mathcal{F}_t, t \in T$.
(ii) Je-li $\tau : \Omega \to S \cup \{\infty\}$, kde $S \subseteq T$ je spočetná, pak $\tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t) \equiv [\tau = s] \in \mathcal{F}_s, s \in S$.

**Důkaz:** (i) Zřejmě $[\tau < t] = \cup_{s\in S_t}[\tau \le s] \in \mathcal{F}_t$, kde $S_t \subseteq T_t$ je spočetná hustá zprava. Potom také

$$[\tau = t] = [\tau \le t]\backslash[\tau < t] \in \mathcal{F}_t, \quad t \in T.$$

(ii) Ukážeme pouze zpětnou implikaci, přímá plyne z bodu (i). Buď $t \in T$, pak

$$[\tau \le t] = \cup_{s\in S_t}[\tau = s] \in \mathcal{F}_t, \quad \text{neboť} \quad [\tau = s] \in \mathcal{F}_s \quad \text{pro} \quad s \in S_t = \{s \in S; s \le t\}.$$

***Q.E.D.***

**Příklad** Buď $X > 0$ kladná reálná náhodná veličina a $N_t = 1_{[X\le t]}$ její čítací a $I_t = 1_{[X=t]}$ její indikátorový proces. Pak „obecně" $X \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t^N)\backslash\text{MČ}(\mathcal{F}_t^I)$, neboť

$$\mathcal{F}_t^I = \sigma([X = s], s \le t) = \{[X \in S], [X \notin S]; S \subseteq [0,t] \text{ spočetná }\}$$

obecně neobsahuje množinu typu $[X \le t]$.

**Tvrzení 6** Nechť $X = (X_t, t \in T)$ je $\mathcal{F}_t$-adaptovaný integrovatelný proces. Pak $X_t$ je $\mathcal{F}_t$-martingal právě tehdy, když

$$\forall\, \text{MČ}(\mathcal{F}_t) \ni \tau : \Omega \to \{s,r\} \subseteq T \quad EX_s = EX_r = EX_\tau, \tag{8}$$

což se dá interpretovat, že $\mathcal{F}_t$-martingal je proces, který kromě toho, že si zachovává svou úroveň $EX_t$ v deterministických časech $t \in T$ si také zachovává svou úroveň v $\mathcal{F}_t$-markovských časech $\tau$ nabývajících dvou hodnot z $T$.

**Důkaz:** Platí-li (8), $(s,r) \in T^{(2)}$ a $A \in \mathcal{F}_s$, pak $\tau = s \cdot 1_A + r \cdot 1_{\Omega\backslash A} : \Omega \to \{s,r\} \subseteq T$ je $\mathcal{F}_t$-markovský čas, neboť $[\tau = s] = A, [\tau = r] = \Omega\backslash A \in \mathcal{F}_s$ a dle předpokladu tak platí

$$0 = EX_r - EX_\tau = E(X_r - X_\tau) = E[(X_r - X_s)1_A].$$

Je-li naopak proces $X_t$ $\mathcal{F}_t$-martingal a $\text{MČ}(\mathcal{F}_t) \ni \tau : \Omega \to \{s,r\} \subseteq T$, pak pro $s \le t$ máme $A = [\tau = s] \in \mathcal{F}_s$, a tedy

$$0 = E[(X_r - X_s)1_A] = E[(X_r - X_\tau)1_A] = E(X_r - X_\tau) = EX_r - EX_\tau.$$

Tedy proces $X$ si zachovává úroveň v čase $\tau$.

**Příklady** (i) Nechť $S_n$ je $\mathcal{F}_n$-adaptovaný proces a $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, pak

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0, S_n \notin B\} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_n), \qquad \text{neboť} \qquad [\tau \leq n] = \cup_{k\leq n}[S_k \notin B] \in \mathcal{F}_n.$$

(ii) Buď $N_t = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{[S_k \leq t]}$ Poissonův proces. Pak $S_k$ jsou $\mathcal{F}_t^N$-markovské časy, neboť

$$[S_k \leq t] = [N_t \geq k] \in \mathcal{F}_t^N, \quad t \geq 0.$$

**Poznámka:** Buď $(\Omega, \mathcal{A})$ měřitelný prostor a $X : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$. Pak

$$X \in \mathbb{L}^*(\mathcal{A}) \quad \equiv \quad [X \leq x] \in \mathcal{A}, \quad x \in \text{rng}(X) = \{X(\omega); \omega \in \Omega\}.$$

**Důkaz:** Ukážeme pouze zpětnou implikaci, ta přímá plyne okamžitě. Buď $c \in \mathbb{R}$, pak

$$[X < c] = \bigcup_{s \in S} [X \leq s] \in \mathcal{A},$$

kde $S \subseteq (-\infty, c) \cap \text{rng}(X)$ je spočetná hustá zprava. Dále si stačí uvědomit, že $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) = \sigma([-\infty, c); c \in \mathbb{R})$.
***Q.E.D.***

**Připomenutí:** Buď $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$, pak $\tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t) \ \equiv \ [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t, t \in T$. V tom případě také

$$[\tau > t] = \Omega \backslash [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t, \quad [\tau = t] \in \mathcal{F}_t, \quad t \in T.$$

Pro $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$ platí $\tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t) \ \equiv \ 1_{[\tau \leq t]} \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$, tj. právě tehdy, když (jednobodový) čítací proces $1_{[\tau \leq t]}$ události $\tau$ je $\mathcal{F}_t$-adaptovaný (průběžně pozorovatelný).

Buď $\tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t, t \in T)$. Sybolem

$$\boldsymbol{\mathcal{F}_\tau} = \{F \in \mathcal{F}_\infty; F \cap [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t, t \in T\}$$

budeme značit ***$\sigma$-algebru událostí do času $\tau$*** vzhledem k filtraci $\mathcal{F}_t$. Zřejmě

(9) $$F \in \mathcal{F}_\tau \quad \equiv \quad F \cap [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t, \quad t \in T \cup \{\infty\}.$$

K ověření, že $\tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$, nestačí ověřit, že $F \cap [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t, t \in T$, ale je třeba ověřit, že tato rovnost platí i pro $t = \infty$. Pokud však zmíněnou podmínku máme ověřeno pro $t \in T$, pak už stačí ověřit, že

$$F \cap [\tau = \infty] \in \mathcal{F}_\infty.$$

Budeme-li chtít interpretovat podmínku (9), pak lze říci, že jev $F \in \mathcal{F}_\infty$ je pozorovatelný v okamžiku, kdy nastane pozorovatelná událost $\tau$. Formálně, $F \in \mathcal{F}_\infty$ je v $\mathcal{F}_\tau$ právě tehdy, když $1_F \cdot 1_{[\tau \leq t]} \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$. V této souvislosti si je vhodné uvědomit, že my průběžně pozorujeme dva procesy a to $1_{[\tau \leq t]}, 1_{[\tau \leq t]} \cdot 1_A$. Pokud $\tau(\omega) < \infty$, pak v čase $t = \tau(\omega)$ se z hodnoty druhého procesu dozvíme, zda jev $F$ nastal, či nikoli.

**Příklad:** Je-li $\tau \equiv t_0$, tj. $\tau : \Omega \to \{t_0\} \subseteq T \subseteq \mathbb{R}$, pak $\tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$ a $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{t_0}$.

**Tvrzení 7** Buď $\tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$. Pak $\mathcal{F}_\tau$ je $\sigma$-algebra, $\tau \in \mathbb{L}^*(\mathcal{F}_\tau)$ a $\tau \wedge t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$. Dále
a) Je-li $\rho : \Omega \to T \cup \{\infty\}$ a $\tau \leq \rho \in \mathbb{L}^*(\mathcal{F}_\tau)$. Pak $\rho \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$.[8]
b) Nechť $\rho \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$, pak

(1) $\rho \wedge \tau, \rho \vee \tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$ (uzavřenost na svazové operace)
(2) $\rho \leq \tau \ \Rightarrow \ \mathcal{F}_\rho \subseteq \mathcal{F}_\tau$ (monotonie)
(3) $[\rho \leq \tau], [\rho < \tau], [\rho = \tau] \in \mathcal{F}_\rho \cap \mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{\rho \wedge \tau}$ (porovnávání časů)
(4) $F \in \mathcal{F}_\rho \ \Rightarrow \ F \cap [\rho \leq \tau] \in \mathcal{F}_\tau$. (stopování)

**Důkaz:** Zřejmě, $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$, neboť $\Omega \cap [\tau \leq t] = [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t, t \in T \cup \{\infty\}$. Protože jsou stopy množiny $A \mapsto A \cap [\tau \leq t]$ uzavřené na množinové operace, je $\mathcal{F}_\tau$ uzavřena na rozdíl i spočetné sjednocení, a je tedy $\sigma$-algebra. Nyní ověříme, že $\tau \in \mathbb{L}^*(\mathcal{F}_\tau)$ s využitím poznámky uvedené výše. Buď $x \in T$, ukážeme, že $[\tau \leq x] \in \mathcal{F}_\tau$. Pro $t \in T \cup \{\infty\}$ zřejmě platí

$$[\tau \leq x] \cap [\tau \leq t] = [\tau \leq x \wedge t] \in \mathcal{F}_{t \wedge x} \subseteq \mathcal{F}_t, \qquad \text{neboť} \qquad \tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t).$$

[8] Předpoklad $\tau \leq \rho \in \mathbb{L}^*(\mathcal{F}_\tau)$ interpretujeme tak, že v čase $\tau$, který mimochodem pozorujeme, jakmile nastane, se dozvíme hodnotu času $\rho$, a tedy tu událost $\rho$ jsme schopni pozorovat ve chvíli, kdy nastane. My jsme ji schopni totiž pozorovat už v čase $\tau \leq \rho$.

Tedy $[\tau \le x] \in \mathcal{F}_\tau, x \in T$, což znamená, že $\tau \in \mathbb{L}^*(\mathcal{F}_\tau)$. Z úvodní části tvrzení tedy zbývá jen ukázat, že $\tau \wedge t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$. Buď tedy $t \in T$, ukážeme, že $\tau \wedge t \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_t)$. Buď $c \in \mathbb{R}$ ukážeme, že $[\tau \wedge t < c] \in \mathcal{F}_t$ a to rozborem případů. Je-li $t < c$, pak $[\tau \wedge t < c] = \Omega \in \mathcal{F}_t$. Je-li naopak $t \ge c$, pak

$$[\tau \wedge t < c] = [\tau < c] = \bigcup_{s \in S} [\tau \le s] \in \mathcal{F}_t,$$

kde $S \subseteq (-\infty, c) \cap T$ je spočetná hustá zprava, neboť pro $s \in S$ platí $s < c \le t$, a tedy $[\tau \le s] \in \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$.

a) Buď $t \in T$. Protože $\rho \in \mathbb{L}^*(\mathcal{F}_\tau)$, platí $F = [\rho \le t] \in \mathcal{F}_\tau$, a tedy $[\rho \le t] = [\rho \le t] \cap [\tau \le t] \in \mathcal{F}_t$.

b) (1) Buď $t \in T$, pak

$$[\rho \wedge \tau \le t] = [\rho \le t] \cup [\tau \le t] \in \mathcal{F}_t, \quad [\rho \vee \tau \le t] = [\rho \le t] \cap [\tau \le t] \in \mathcal{F}_t.$$

(2) Buď $F \in \mathcal{F}_\rho$. Ukážeme, že $F \cap [\tau \le t] \in \mathcal{F}_t, t \in T \cup \{\infty\}$. Protože $\rho \le \tau$, platí

$$F \cap [\tau \le t] = \big(F \cap [\rho \le t]\big) \cap [\tau \le t] = G \cap [\tau \le t] \in \mathcal{F}_t, \quad t \in T \cup \{\infty\},$$

kde $G = F \cap [\rho \le t] \in \mathcal{F}_t$, neboť $F \in \mathcal{F}_\rho$. Celkem tak dostáváme, že $F \in \mathcal{F}_\tau$.

(3) Ukážeme, že $F = [\rho < \tau] \in \mathcal{F}_\rho \cap \mathcal{F}_\tau$. Pak zřejmě $[\rho \ge \tau] \in \mathcal{F}_\rho \cap \mathcal{F}_\tau$ a ze symetrie předpokladů dostaneme také, že $[\rho \le \tau] \in \mathcal{F}_\rho \cap \mathcal{F}_\tau$. Zřejmě pak také $[\rho = \tau] = [\rho \le \tau] \setminus [\rho < \tau] \in \mathcal{F}_\rho \cap \mathcal{F}_\tau$. Buď $t \in T \cup \{\infty\}$, pak

$$F \cap [\tau \le t] = [\rho < \tau \le t] = \bigcup_{s \in S} [\rho \le s] \cap [\tau > s] \cap [\tau \le t] \in \mathcal{F}_t,$$

kde $S \subseteq T_t$ je spočetná hustá zprava a kde $[\rho \le s] \cap [\tau > s] \in \mathcal{F}_s$ pro $s \in S$, neb $T \ni s \le t$ a $\rho, \tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$. Platí tedy $F \in \mathcal{F}_\tau$. Podobně ukážeme, že $F \in \mathcal{F}_\rho$

$$F \cap [\rho \le t] = [\rho < \tau] \cap [\rho \le t] = \bigcup_{s \in S} [\rho \le s] \cap [\tau > s] \in \mathcal{F}_t, \quad t \in T \cup \{\infty\}.$$

Celkem tak dostáváme, že $F = [\rho < \tau] \in \mathcal{F}_\rho \cap \mathcal{F}_\tau$. Zbylou rovnost $\mathcal{F}_\rho \cap \mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{\rho \wedge \tau}$ ukážeme později.

(4) Buď $F \in \mathcal{F}_\rho$, chceme ukázat, že $G = F \cap [\rho \le \tau] \in \mathcal{F}_\tau$. Buď $t \in T \cup \{\infty\}$, pak

$$G \cap [\tau \le t] = F \cap [\rho \le \tau \le t] = \big(F \cap [\rho \le t]\big) \cap \big([\rho \le \tau] \cap [\tau \le t]\big) \in \mathcal{F}_t,$$

neboť $F \cap [\rho \le t] \in \mathcal{F}_t$, protože $F \in \mathcal{F}_\rho$, a $[\rho \le \tau] \cap [\tau \le t] \in \mathcal{F}_t$, protože $[\rho \le \tau] \in \mathcal{F}_\tau$ dle dokázané části bodu (3). Celkem tedy dostáváme $G \in \mathcal{F}_\tau$. Nyní zbývá ukázat $\mathcal{F}_\rho \cap \mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{\rho \wedge \tau}$.

(3*) Zřejmě $\mathcal{F}_{\rho \wedge \tau} \subseteq \mathcal{F}_\rho \cap \mathcal{F}_\tau$ dle (2), neboť podle bodu (1) jsou $\rho \wedge \tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$ splňující $\rho \wedge \tau \le \rho, \tau$. Buď nyní naopak $F \in \mathcal{F}_\rho \cap \mathcal{F}_\tau$ a $t \in T \cup \{\infty\}$. Pak

$$F \cap [\rho \wedge \tau \le t] = \big(F \cap [\rho \le t]\big) \cup \big(F \cap [\rho \le t]\big) \in \mathcal{F}_t$$

neboť $F \cap [\rho \le t] \in \mathcal{F}_t$, protože $F \in \mathcal{F}_\rho$, a $F \cap [\tau \le t] \in \mathcal{F}_t$, protože $F \in \mathcal{F}_\tau$. Platí tedy $F \in \mathcal{F}_{\rho \wedge \tau}$.

***Q.E.D.***

**Tvrzení 8** Nechť $T \subseteq \mathbb{R}$ je uzavřená množina a $\tau_n \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t), n \in \mathbb{N}$. Pak

a) $\tau = \sup\{\tau_n; n \in \mathbb{N}\} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$

b) $\nu = \inf\{\tau_n; n \in \mathbb{N}\} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_{t+})$,[9] pokud $\nu > -\infty$.

**Důkaz:** (a) Protože je $T$ uzavřená množina, platí $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$. Dále

$$[\tau \le t] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [\tau_n \le t] \in \mathcal{F}_t, \quad t \in T.$$

(b) Protože $\nu > -\infty$, platí opět $\nu : \Omega \to T \cup \{\infty\}$. Pro zprava izolované body platí

$$[\nu \le t] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\tau_n \le t] \in \mathcal{F}_t, \quad t \in T_+.$$

Buď naopak $t \in T$ zprava hromadný bod v $T$. Pak se nám bude hodit následující vyjádření

$$[\nu < s] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\tau_n < s] \in \mathcal{F}_s, \quad s \in T_{t+}.$$

Pro $r \in T_{t+}$ buď $S_r \subseteq T_{t+} \cap T_r$ hustá spočetná, pak $t = \inf S_r$ a platí

$$[\nu \le t] = \bigcap_{s \in S_r} [\nu < s] \in \mathcal{F}_r, \quad r \in T_{t+}.$$

[9] Speciálně $\nu \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$, je-li filtrace $(\mathcal{F}_t)$ zprava spojitá.

Pro $t \in T$ zprava hromadné tak platí $[\nu \leq t] \in \cap_{r \in T_{t+}} \mathcal{F}_r = \mathcal{F}_{t+}$. ***Q.E.D.***

**Poznámka** Je-li $S \subseteq \mathbb{R}$ lokálně konečná množina a $x \in \mathbb{R}$, pak symbolem

$$\lfloor \boldsymbol{x} \rfloor_{\boldsymbol{S}} = \sup\{s \in S; s \leq x\} \in S \cup \{-\infty\}$$

značíme ***zaokruhlení x dolů vzhledem k S*** a symbolem

$$\lceil \boldsymbol{x} \rceil_{\boldsymbol{S}} = \inf\{s \in S; s \geq x\} \in S \cup \{\infty\}$$

***zaokruhlení nahoru vzhledem k S***. Je-li $\tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t, t \in T)$ a $S \subseteq T$ lokálně konečná, pak

$$\lceil \tau \rceil_S \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t, t \in T) \cap \text{MČ}(\mathcal{F}_s, s \in S),$$

neboť $[\lceil \tau \rceil_S \leq t] = [\lceil \tau \rceil_S \leq \lfloor t \rfloor_S] = [\tau \leq \lfloor t \rfloor_S] \in \mathcal{F}_{\rfloor t \rfloor_S} \subseteq \mathcal{F}_t, t \in T$.

Buď $(X_t, t \in T)$ reálný náhodný proces, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ a $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$. Pak předpisem

$$\boldsymbol{\rho_{B,\tau}} = \inf\{t \in T; t \geq \tau, X_t \notin B\}$$

definujeme ***čas (okamžik) prvního výstupu procesu X z množiny B po čase τ***.

**Tvrzení 9** Nechť $X_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t, t \in T), \tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$ a $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
(i) Je-li $S \subseteq T$ lokálně konečná, pak

$$\rho = \inf\{s \in S, s \geq \tau, X_s \notin B\} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t, t \in T).$$

(ii) Je-li $S \subseteq T$ spočetná a $T \subseteq \mathbb{R}$ uzavřená, pak

$$\rho = \inf\{s \in S, s \geq \tau, X_s \notin B\} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_{t+}, t \in T).$$

**Důkaz:** (i) Buď $t \in T$, pak

$$[\rho \leq t] = \bigcup_{s \in S_t} [\tau \leq s] \cap [X_s \notin B] \in \mathcal{F}_t,$$

kde $S_t = \{s \in S; s \leq t\} \subseteq S$ je spočetná. (ii) Buďte $S_n \uparrow S, n \to \infty$ konečné. Dle (i) platí

$$\rho_n = \inf\{s \in S_n; s \geq \tau, X_s \notin B\} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dle tvrzení o infimu markovských časů platí $\rho_\infty = \inf\{\rho_n, n \in \mathbb{N}\} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_{t+})$. Ukážeme, že $\rho_\infty = \rho$. Zřejmě $\rho \leq \rho_n, n \in \mathbb{N}$, a tedy $\rho \leq \rho_\infty$. Sporem ukážeme obrácenou neorvnost. Buď tedy $\omega \in \Omega$ takové, že $\rho_\infty(\omega) > \rho(\omega)$. Z definice $\rho$ jako infima plyne, že existuje $s \in S$ takové, že $\rho_\infty(\omega) > s \geq \tau(\omega)$ a $X_s(\omega) \notin B$. Protože $s \in S = \cup_n S_n$, existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $s \in S_n$. Pak ale $\rho_n(\omega) \leq s < \rho_\infty(\omega) \leq \rho_n(\omega)$, což je spor. Platí tedy, že $\rho = \rho_\infty \in \text{MČ}(\mathcal{F}_{t+})$. ***Q.E.D.***

**Tvrzení 10** Buď $T \subseteq \mathbb{R}$ uzavřená, $X_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t, t \in T), \tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$.
(i) Je-li proces $X_t$ zprava spojitý, $F \subseteq \mathbb{R}$ uzavřená, pak $\rho_{F,\tau} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_{t+})$.
(ii) Je-li $X_t$ spojitý, $G \subseteq \mathbb{R}$ otevřená, pak $\rho_{G,\tau} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$.
(iii) Je-li $X_t$ spojitý a $H \subseteq \mathbb{R}$ typu $G_\delta$, pak $\rho_{H,\tau} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_{t+})$.

**Důkaz:** (i) Buď $S \subseteq T$ spočetná hustá zprava. Pak z předcházejícího tvrzení dostáváme, že

$$\rho = \inf\{s \in S; s \geq \tau, X_s \notin F\} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_{t+}).$$

Ukážeme rovnost $\rho = \rho_{F,\tau}$. Zřejmě $\rho_{F,\tau} \leq \rho$. Sporem ukážeme obrácenou nerovnost. Buď $\omega \in \Omega$ takové, že $\rho_{F,\tau}(\omega) < \rho(\omega)$. Pak z definice $\rho_{F,\tau}$ plyne, že existuje $t \in T, \tau(\omega) \leq t < \rho(\omega)$ takové, že $X_t(\omega) \notin F$. Zřejmě $G = \mathbb{R} \backslash F$ je otevřená množina obsahující $X_t(\omega)$. Protože $S \subseteq T$ je hustá zprava, existuje posloupnost $s_n \in S, t \leq s_n$ takové, že $s_n \to t$. Protože proces $X$ je zprava spojitý, platí

$$\lim_{n \to \infty} X_{s_n} = X_t \in G.$$

Existuje tedy $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $X_{s_n} \in G$ pro $n \geq n_0$. Tedy $X_{s_n} \notin F$, což znamená, že $\rho(\omega) \leq s_n \to t < \rho(\omega)$, tedy spor. Dostáváme tedy, že $\rho_{F,\tau} = \rho \in \text{MČ}(\mathcal{F}_{t+})$.
(ii) Buď $G \subseteq \mathbb{R}$ otevřená množina. Protože je množina $G$ otevřená, platí

$$\rho_{B,\tau} = \min\{t \in T; t \geq \tau, X_t \notin B\},$$

přičemž $\min \emptyset = \inf \emptyset = \infty$. Je-li totiž $t_n \in T \downarrow t$ posloupnost taková, že $X_{t_n} \in F = \mathbb{R} \backslash G$, pak $t \in T$, neboť $T$ je podle předpokladu uzavřená množina a také

$$X_t = \lim_{n \to \infty} X_{t_n} \in F = \mathbb{R} \backslash G,$$

neboť proces $X$ je spojitý (zprava) a $F$ je uzavřená množina. Nyní se pousíme čas $\rho_{G,\tau}$ výstupu z otevřené množiny předvídat výstupem z vepsaných uzavřených množin

$$F^\varepsilon = \{x \in G; \mathrm{dist}(x, F) \geq \varepsilon\}.$$

Protože $\mathrm{dist}(x, F)$ je infimem 1-lipschitzovských funkcí a je také 1-lipschitzovská, a tedy spojitá. Pak odpovídající vzor $F^\varepsilon$ uzavřené množiny $[\varepsilon, \infty)$ je uzavřená množina. Dle bodu (i) platí $\rho_{F^\varepsilon,\tau} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_{t+})$. Protože spočetné supremum markovských časů je opět markovský čas, dostanme, že

$$\rho = \sup\{\rho_{F^\varepsilon,\tau}, \mathbb{Q} \ni \varepsilon > 0\} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_{t+}).$$

Dále ukážeme, že $\rho_{G,\tau} = \rho$. Protože $F^\varepsilon \subseteq G$, platí $\rho_{F^\varepsilon,\tau} \leq \rho_{G,\tau}$ pro $\varepsilon > 0$. Tedy i $\rho \leq \rho_{G,\tau}$. S využitím předpokladu spojitosti procesu $X$ ukážeme i opačnou nerovnost. Buď $\omega \in \Omega$ a $T \ni t \geq \rho(\omega)$, ukážeme, že potom také $t \geq \rho_{G,\tau}(\omega)$. Pro každé $\mathbb{Q} \ni \varepsilon > 0$ tak platí $t \geq \rho_{F^\varepsilon,\tau}(\omega)$, a tedy existují $\tau(\omega) \leq t_\varepsilon \in T_t$ takové, že $X_{t_\varepsilon} \notin F^\varepsilon$. Buď $\varepsilon_n \to 0$ vybraná posloupnost taková, že posloupnost $t_{\varepsilon_n}$ je konvergentní k nějakému $s \in T \cap [\tau(\omega), t]$. Protože $x \mapsto \mathrm{dist}(x, F)$ je spojitá funkce a protože proces $X$ je spojitý, platí

$$\mathrm{dist}(X_s(\omega), F) = \lim_{n \to \infty} \mathrm{dist}(X_{t_{\varepsilon_n}}(\omega), F) \leq \lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Protože $F = \mathbb{R} \backslash G$ je uzavřená množina, platí $X_s(\omega) \in F$, z čehož plyne, že $\rho_{G,\tau}(\omega) \leq s \leq t$, kdykoli $\rho(\omega) \leq t$. Celkem tak dostaneme i opačnou rovnost $\rho_{G,\tau} \leq \rho$, a celkem tedy platí

$$\rho_{G,\tau} = \rho \in \text{MČ}(\mathcal{F}_{t+}).$$

Buď nyní $t \in T$ pevné. Pak s využitím toho, že v definici $\rho_{G,\tau}$ se infima nabývá, můžeme psát

$$[\rho_{G,\tau} \leq t] = [\rho_{G,\tau} < t] \cup [X_t \notin G] \in \mathcal{F}_t,$$

neboť

$$[\rho_{G,\tau} < t] = \bigcup_{t > s \in S} [\rho_{G,\tau} \leq s] \in \mathcal{F}_t,$$

protože $[\rho_{G,\tau} \leq s] \in \mathcal{F}_{s+} \subseteq \mathcal{F}_t$, kdykoli $t > s \in S$, kde $S \subseteq T$ je spočetná podmnožina hustá zprava.
(iii) Buďte $G_n \downarrow H, n \in \mathbb{N}$ otevřené. Pak dle (ii)

$$\rho = \inf\{\rho_{G_n,\tau}; n \in \mathbb{N}\} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_{t+}).$$

Ukážeme, že $\rho = \rho_{H,\tau}$. Zřejmě $\rho_{H,\tau} \leq \rho_{G_n,\tau}, n \in \mathbb{N}$ a tedy $\rho_{H,\tau} \leq \rho$. Sporem ukážeme obrácenou nerovnost. Buď $\omega \in \Omega$ takové, že $\rho_{H,\tau}(\omega) < \rho(\omega)$. Z definice $\rho_{H,\tau}$ jako infima dostaneme, že existuje $t \in T \cap [\tau(\omega), \rho(\omega))$ takové, že $X_t(\omega) \notin H$. Tedy

$$X_t(\omega) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n, \quad F_n = \mathbb{R} \backslash G_n.$$

Existuje tedy $n \in \mathbb{N}$ takové, že $X_t(\omega) \notin G_n$, což znamená, že $\rho_{G_n,\tau}(\omega) \leq t < \rho(\omega) \leq \rho_{G,\tau}(\omega)$. Tedy spor a platí tedy rovnost

$$\rho_{G,\tau} = \rho \in \text{MČ}(\mathcal{F}_{t+}).$$

***Q.E.D.***

**Tvrzení 11** Nechť $T \subseteq \mathbb{R}$ je uzavřená, $X_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t, t \in T)$ zprava spojitý, $\tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$, kde $\mathcal{F}_t$ je zprava spojitá filtrace. Pak

$$X_\tau \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_\tau), \quad \text{kde} \quad \boldsymbol{X_\tau}(\omega) = X(\omega)_{\tau(\omega)} \cdot 1_{[\tau(\omega) < \infty]}.$$

**Důkaz:** (1) V prvním kroku budeme předpokládat, že $T$ je lokálně konečná množina. V tom případě předpoklad spojitosti prava jak procesu $X_t$ tak filtrace $\mathcal{F}_t$ je automaticky splněn a není tedy ve znění tvrzení vůbec omezující. Pro $t \in T \cup \{\infty\}$ a $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ zřejmě platí

$$[X_\tau \in B] \cap [\tau \leq t] = \bigcup_{s \in T_t} [X_s \in B] \cap [\tau = s] \in \mathcal{F}_t,$$

kde operativně klademe $X_\infty = 0$. Platí tedy $[X_\tau \in B] \in \mathcal{F}_\tau, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, a tedy $X_\tau \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_\tau)$.
(2) Buď nyní $T$ obecné a buď $S \subseteq T$ spočetná množina hustá zprava a $S_n \uparrow S$ konečné. Dle (1) platí

$$X_{\tau_n} \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_{\tau_n}), \quad \text{kde} \quad \tau_n = \lceil \tau \rceil_{S_n} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t).$$

Označme $\tau_\infty = \inf\{\tau_n; n \in \mathbb{N}\} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_{t+}) = \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$. Protože proces $X_t$ je spojitý zprava, platí

$$X_{\tau_\infty} = \lim_{n\to\infty} X_{\tau_n} \in \mathbb{L}(\cap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_{\tau_n}).$$

Dále ukážeme, že platí rovnost $\tau = \tau_\infty$. Protože $\tau \leq \tau_n, n \in \mathbb{N}$, máme okamžitě nerovnost $\tau \leq \tau_\infty$. Sporem ukážeme, že platí i opačná nerovnost. Buď $\omega \in \Omega$ takové, že $\tau(\omega) < \tau_\infty(\omega)$. Protože $S \subseteq T$ je hustá zprava, existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $S_n \cap [\tau(\omega), \tau_\infty(\omega)) \neq \emptyset$. Pak ovšem $\tau_n(\omega) = \lceil \tau(\omega) \rceil_{S_n} < \tau_\infty(\omega) \leq \tau_n(\omega)$, což je spor. Platí tedy

$$\tau = \tau_\infty, \quad X_\tau \in \mathbb{L}(\mathcal{F}), \quad \text{kde} \quad \mathcal{F} = \cap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_{\tau_n}.$$

Zbývá tedy ukázat, že pro limitní $\sigma$-algebru $\mathcal{F} = \cap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_{\tau_n}$ platí $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\tau$ a to s využitím předpokladu spojitosti zprava. Protože $\tau \leq \tau_n$, dostáváme ihned, že $\mathcal{F}_\tau \subseteq \cap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_{\tau_n}$. Zbývá tedy ukázat opačnou inkluzi.

Buď tedy $A \in \cap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_{\tau_n}$. Ukážeme, že $A \cap [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t, t \in T \cup \{\infty\}$. Nejprve buď $t \in T_+ \cup \{\infty\}$, pak

$$A \cap [\tau \leq t] = A \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [\tau_n \leq t] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A \cap [\tau_n \leq t] \in \mathcal{F}_t,$$

neboť $A \cap [\tau_n \leq t] \in \mathcal{F}_t$, protože $A \in \mathcal{F}_{\tau_n}, n \in \mathbb{N}$. Je-li naopak $t \in T \backslash T_+$ zprava hromadný bod, pak pro každé $r \in T_{t+}$ platí

$$A \cap [\tau \leq t] = A \cap \bigcap_{s\in S\cap(t,r)} [\tau < s] = \bigcap_{s\in S\cap(t,r)} A \cap [\tau < s] \in \mathcal{F}_r,$$

neboť pro každé $s \in S \cap (t, r)$ platí

$$A \cap [\tau < s] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \cap [\tau_n < s] \in \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_r.$$

Zde jsme využili toho, že $A \cap [\tau \leq s] \in \mathcal{F}_s$ a také možnému rozpisu

$$A \cap [\tau < s] = \big(A \cap [\tau \leq s]\big) \cap [\tau < s] \in \mathcal{F}_s.$$

Pro každé $t \in T\backslash T_+$ tedy platí

$$A \cap [\tau \leq t] \in \bigcap_{r\in T_{t+}} \mathcal{F}_r = \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t.$$

Pro každé $t \in T \cup \{\infty\}$ tak platí $A \cap [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t$, a tedy $A \in \mathcal{F}_\tau$. ***Q.E.D.***

## 5. Optional Sampling Theorem a Optional Stopping Theorem

**Tvrzení 12** Buď $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ $\mathcal{F}_n$-martingal (super, sub) a $\nu, \tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_n)$. Pokud $\nu \leq \tau \in \mathbb{L}_\infty$, pak

$$X_\nu, X_\tau \in \mathbb{L}_1 \quad \text{a} \quad X_\nu \overset{\text{sj}}{=} E[X_\tau|\mathcal{F}_\nu] \quad (\overset{\text{sj}}{\geq}, \overset{\text{sj}}{\leq}).$$

**Důkaz:** Zřejmě $|X_\nu|, |X_\tau| \leq \sum_{k=0}^m |X_k| \in \mathbb{L}_1$, kde $m \in \mathbb{N}_0$ je takové, že $\tau \overset{\text{sj}}{\leq} m$.

(i) Nejprve ukážeme, že můžeme předpokládat, že $\nu \leq \tau \overset{\text{sj}}{\leq} \nu + 1$. Předpokládejme tedy, že výše uvedené tvrzení platí za právě zmíněného předpokladu. Ukážeme indukcí, že platí i bez tohoto dodatečného předpokladu. Označme $\tau_k = (\nu + k) \wedge \tau$. Pak $\nu = \tau_0 \leq \ldots \leq \tau_m = \tau$ a pro $k < m$ platí $\tau_{k+1} \overset{\text{sj}}{\leq} \tau_k + 1$. Využijeme-li tedy indukčního předpokladu, který je dán první z následujících relací, dostaneme

$$X_\nu \overset{\text{sj}}{=} E[X_{\tau_k}|\mathcal{F}_\nu] \overset{\text{sj}}{=} E[E(X_{\tau_{k+1}}|\mathcal{F}_{\tau_k})|\mathcal{F}_\nu] \overset{\text{sj}}{=} E[X_{\tau_{k+1}}|\mathcal{F}_\nu] \qquad (\overset{\text{sj}}{\geq}, \overset{\text{sj}}{\leq}),$$

přičemž v druhé relaci využíváme předpokladu, že tvrzení platí za výše popsaného omezujícího předpokladu. Volba $k = m - 1$ nám pak dává požadovanou relaci.

(ii) Nechť tedy $\nu \leq \tau \overset{\text{sj}}{\leq} \nu + 1$. Pak $X_\tau - X_\nu = (X_{\nu+1} - X_\nu) \cdot 1_{[\nu<\tau]}$, přičemž $[\nu < \tau] \in \mathcal{F}_\nu$. Buď nyní $F \in \mathcal{F}_\nu$, pak $G = F \cap [\nu < \tau] \in \mathcal{F}_\nu$ a platí

$$\int_F (X_\tau - X_\nu)\, \mathrm{d}P = \sum_{k=0}^m \int_{G_k} (X_{k+1} - X_k)\, \mathrm{d}P \quad (\overset{\text{sj}}{\leq}, \overset{\text{sj}}{\geq}),$$

kde

$$G_k = G \cap [\nu = k] = \big(G \cap [\nu \leq k]\big) \backslash \big(G \cap [\nu \leq k - 1]\big) \in \mathcal{F}_k.$$

***Q.E.D.***

**Věta (Optional Stopping Theorem - věta o zastavení)**[10]

Buď $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ $\mathcal{F}_n$-martingal (super, sub) a $\tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_n)$. Pak $X_{\tau\wedge n}$ je $\mathcal{F}_n$-martingal (super, sub).

[10] Čas $\tau$ zde interpretujeme jako okamžik zastavení sledovaného procesu, přičemž takto vzniklý proces je konstatní (zastavený, zmrazený) v časea $\tau$.

**Důkaz:** Např. podle předcházejícího tvrzení platí $X_{\tau\wedge n} \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_{\tau\wedge n}) \subseteq \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_n)$. Zřejmě

$$X_{\tau\wedge n} - X_{\tau\wedge(n-1)} = (X_n - X_{n-1}) \cdot 1_{[\tau>n-1]}, \qquad \text{kde} \qquad [\tau > n-1] \in \mathcal{F}_{n-1}.$$

Platí tedy

$$E[X_{\tau\wedge n} - X_{\tau\wedge(n-1)}|\mathcal{F}_{n-1}] = 1_{[\tau>n-1]} \cdot E[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \stackrel{\text{sj}}{=} 0 \quad (\stackrel{\text{sj}}{\leq}, \stackrel{\text{sj}}{\geq}).$$

***Q.E.D.***

**Lemma 6** Buď $Z \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ filtrace na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Buďte $\nu, \tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$. Pak
(a) $E[Z|\mathcal{F}_{\tau\wedge\nu}] \stackrel{\text{sj}}{=} E[Z|\mathcal{F}_\nu]$ na $[\nu \leq \tau]$.[11]
(b) $E[Z|\mathcal{F}_{\tau\wedge\nu}] \stackrel{\text{sj}}{=} E[E(Z|\mathcal{F}_\nu)|\mathcal{F}_\tau]$.

**Důkaz:** (a) Nejprve přepíšeme tvrzení (a) do více formálního zápisu, přičemž pravou stranu upravíme

$$E[Z|\mathcal{F}_{\tau\wedge\nu}] \cdot 1_{[\nu\leq t]} \stackrel{\text{sj}}{=} E[Z|\mathcal{F}_\nu] \cdot 1_{[\nu\leq t]} \stackrel{\text{sj}}{=} E[Z \cdot 1_{[\nu\leq t]}|\mathcal{F}_\nu].$$

Tato úprava je přípustná, neboť $[\nu \leq \tau] \in \mathcal{F}_{\nu\wedge\tau} \subseteq \mathcal{F}_\nu$. Naším úkolem je ukázat tedy rovnost mezi levou a pravou stranou. Levá strana je zřejmě integrovatelná a $\mathcal{F}_\nu$-měřitelná. Buď tedy $F \in \mathcal{F}_\nu$. Integrací levé strany na množině $F$ dostaneme

$$\int_F E[Z|\mathcal{F}_{\tau\wedge\nu}] \cdot 1_{[\nu\leq\tau]} \,\mathrm{d}P = \int_G E[Z|\mathcal{F}_{\tau\wedge\nu}] \,\mathrm{d}P = \int_G Z \,\mathrm{d}P = \int_F Z \cdot 1_{[\nu\leq\tau]} \,\mathrm{d}P,$$

neboť $G = F \cap [\nu \leq \tau] \in \mathcal{F}_\tau$ dle základních vlastností markovských časů a $\sigma$-algebry událostí.

(b) Zřejmě $E[Z|\mathcal{F}_{\tau\wedge\nu}] \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_\tau)$. Buď nyní $F \in \mathcal{F}_\tau$. Pak $G = F \cap [\tau \leq \nu] \in \mathcal{F}_\nu \cap \mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{\tau\wedge\nu}$, a tedy

$$\int_G E[Z|\mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}] \,\mathrm{d}P = \int_G Z \,\mathrm{d}P = \int_G E[Z|\mathcal{F}_\nu] \,\mathrm{d}P = \int_G E[E(Z|\mathcal{F}_\nu)|\mathcal{F}_\tau] \,\mathrm{d}P.$$

Buď nyní $H = F \cap [\nu < \tau] \subseteq [\nu \leq \tau]$, a dle (a) tak platí

$$E[Z|\mathcal{F}_{\tau\wedge\nu}] \cdot 1_H \stackrel{\text{sj}}{=} E[Z|\mathcal{F}_\nu] \cdot 1_H$$

Platí tedy

$$\int_H E[Z|\mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}] \,\mathrm{d}P = \int_H E[Z|\mathcal{F}_\nu] \,\mathrm{d}P = \int_H E[E(Z|\mathcal{F}_\nu)|\mathcal{F}_\tau] \,\mathrm{d}P,$$

neboť $H \in \mathcal{F}_\tau$, protože $F, [\nu < \tau] \in \mathcal{F}_\tau$. Protože platí rovnost integrálů z obou stran postupně na množinách $G, H$, platí také na jejich sjednocení $F = G \cup H \in \mathcal{F}_\tau$. ***Q.E.D.***

**Podmíněné Fatouovo lemma** Buďte $0 \leq X_n \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P), n \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ $\sigma$-algebra. Pak

$$X = \liminf_{n\to\infty} X_n \in \mathbb{L}_1 \quad \Rightarrow \quad 0 \stackrel{\text{sj}}{\leq} E[X|\mathcal{F}] \stackrel{\text{sj}}{\leq} \liminf_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{F}_n].$$

**Důkaz:** Použijeme Léviho větu o monotónní konvergenci pro podmíněnou střední hodnotu. Zřejmě platí $0 \leq \inf_{k\geq n} X_k \uparrow X \in \mathbb{L}_1$. Pak tedy

$$0 \stackrel{\text{sj}}{\leq} E[X|\mathcal{F}] \stackrel{\text{sj}}{=} \lim_{n\to\infty} E[\inf_{k\geq n} X_k|\mathcal{F}] \stackrel{\text{sj}}{\leq} \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} E[X_k|\mathcal{F}] \stackrel{\text{sj}}{=} \liminf_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{F}].$$

***Q.E.D.***

**Tvrzení 13** Buď $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ $\mathcal{F}_n$-submartingal, $\nu, \tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_n)$. Nechť $\nu \leq \tau \stackrel{\text{sj}}{<} \infty$, nechť dále

$$X_\nu, X_\tau \in \mathbb{L}_1 \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} E[X_n^+; n < \tau] = 0,$$ [12]

kde $\boldsymbol{E[X; A]} = E[X \cdot 1_A]$ značí ***střední hodnotu reálné náhodné velčiny X na množině A***. Pak

$$X_\nu \stackrel{\text{sj}}{\leq} E[X_\tau|\mathcal{F}_\nu].$$

**Důkaz:** Zřejmě $\nu \wedge n \leq \tau \wedge n$ jsou omezené $\mathcal{F}_n$-markovské časy. Protože $\tau \stackrel{\text{sj}}{<} \infty$ a $X_{\tau\wedge n} \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_n)$, platí

$$X_{\nu\wedge n} \stackrel{\text{sj}}{\leq} E[X_{\tau\wedge n}|\mathcal{F}_{\nu\wedge n}] \stackrel{\text{sj}}{=} E[E(X_{\tau\wedge n}|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_\nu] \stackrel{\text{sj}}{=} E[X_{\tau\wedge n}|\mathcal{F}_\nu] \stackrel{\text{sj}}{=} E[X_{\tau\wedge n}^+|\mathcal{F}_\nu] - E[X_{\tau\wedge n}^-|\mathcal{F}_\nu].$$

Použitím podmíněného Fatouova lemmatu dostaneme

$$\liminf_{n\to\infty} E[X_{\tau\wedge n}^-|\mathcal{F}_\nu] \geq E[X_\tau^-|\mathcal{F}_\nu].$$

Předpoklad $E[X_n; n < \tau] \to 0, n \to \infty$ pak znamená, že $X_{n\wedge\tau}^+ \to X_\tau^+$ v $\mathbb{L}_1$, neboť

$$|X_\tau^+ - X_{\tau\wedge n}^+| = |X_\tau^+ - X_n^+| \cdot 1_{[\tau>n]} \leq X_\tau^+ \cdot 1_{[\tau>n]} + X_n^+ \cdot 1_{[\tau>n]} \to 0 \quad \text{v} \quad \mathbb{L}_1, \quad n \to \infty.$$

[11] Zápisem $X \stackrel{\text{sj}}{=} Y$ na $A$ rozumíme: $(X - Y)1_A \stackrel{\text{sj}}{=} 0$.

[12] Podmínku $\lim_{n\to\infty} E[X_n^+; n < \tau] = 0$ čteme: střední hodnota kladné části $X_n$ na množině $[n < \tau]$, kdy k události $\tau$ ještě nedošlo, je s rostoucím časem $n \to \infty$ zanedbatelná.

Pak $E[X^+_{n\wedge\tau}|\mathcal{F}_\nu] \to E[X^+_\tau|\mathcal{F}_\nu]$ v $\mathbb{L}_1$ pro $n\to\infty$. Celkem tak dostáváme, že

$$X_\nu \overset{\text{sj}}{\leq} E[X^+_\tau|\mathcal{F}_\nu] - \liminf_{n\to\infty} E[X^-_{\tau\wedge n}|\mathcal{F}_\nu] \leq E[X^+_\tau|\mathcal{F}_\nu] - E[X^-_\tau|\mathcal{F}_\nu] \overset{\text{sj}}{=} E[X_\tau|\mathcal{F}_\nu].$$

***Q.E.D.***

**Poznámky:** Buď $X_n$ $\mathcal{F}_n$-submartingal a $\tau\in \text{MČ}(\mathcal{F}_n)$ a $X^+_\tau\in\mathbb{L}_1$.
(i) Pak je podmínka $\lim_n E[X^+_n; n<\tau]=0$ ekvivalentní se zdánlivě slabší podmínkou

$$\liminf_{n\to\infty} E[X^+_n; n<\tau]=0.$$

Protože je proces $X_n$ dle předpokladu $\mathcal{F}_n$-submartingal a $[\tau>n]\in\mathcal{F}_n$, platí

$$0\leq a_n = E[X^+_n; n<\tau] = E[X^+_{n+1}; n<\tau] = a_{n+1} + E[X^+_\tau; n+1=\tau] = a_{n+1}+o(1), \quad n\to\infty.$$

(ii) Pak také $X_\tau\in\mathbb{L}_1$, neboť, jak ukážeme, platí $X^-_\tau\in\mathbb{L}_1$. Dle optional stopping theorem je proces $X_{\tau\wedge n}$ $\mathcal{F}_n$-submartingal, a má tak neklesající střední hodnotu. Speciálně $EX_{\tau\wedge n}\geq EX_0\in\mathbb{R}$. Pro zápornou část tak dostáváme odhad

$$EX^-_{n\wedge\tau} = EX^+_{n\wedge\tau} - EX_{n\wedge\tau} \leq EX^+_{n\wedge\tau} - EX_0.$$

Z Fatouova lemmatu pak dostaneme

$$EX^-_\tau \leq \liminf_{n\to\infty} EX^-_{n\wedge\tau} \leq EX^+_\tau - EX_0.$$

**Tvrzení 14** (a) Buď $\tau:\Omega\to\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ splňující $\tau\overset{\text{sj}}{<}\infty$ a $(X^+_n, n\in\mathbb{N}_0)$ integrovatelný proces, pak

$$X^+_\tau\in\mathbb{L}_1,\quad \lim_{n\to\infty} E[X^+_n; n<\tau]=0 \quad\equiv\quad X^+_{n\wedge\tau} \text{ je stejnoměrně integrovatelný proces.}$$ [13]

(b) Buď $X_n$ $\mathcal{F}_n$-submartingal a $\text{MČ}(\mathcal{F}_n)\ni\tau\overset{\text{sj}}{<}\infty$, pak

$$X^+_\tau\in\mathbb{L}_1,\quad X^+_{\tau\wedge n}\overset{\text{sj}}{\leq} E[X^+_\tau|\mathcal{F}_n] \quad\equiv\quad X^+_{n\wedge\tau} \text{ je stejnoměrně integrovatelný proces.}$$

**Důkaz:** Na začátku poznamenejme, že součet dvou stejnoměrně integrovatelných procesů je opět stejnoměrně integrovatelný.

(a) Je-li proces $X^+_{\tau\wedge n}$ stejnoměrně integrovatelný, pak i dominovaný proces $X^+_n 1_{[n<\tau]}$ je stejnoměrně integrovatelný a z jeho konvergence skoro jistě k nule ihned dostaneme i konvergenci v $\mathbb{L}_1$. Protože limita stejnoměrně integrovatelné posloupnosti reálných náhodných veličin je integrovatelná, platí

$$X^+_\tau = \lim_{n\to\infty} X^+_{\tau\wedge n}\cdot 1_{[\tau<\infty]}\in\mathbb{L}_1.$$

Platí-li naopak levá strana, pak využijeme odhad

$$0\leq X^+_{\tau\wedge n}\leq X^+_n 1_{[n<\tau]} + X^+_\tau 1_{[n\geq\tau]}.$$

Podle předpokladu $X^+_n 1_{[\tau<n]}\to 0$ v $\mathbb{L}_1$ pro $n\to\infty$, a tato integrovatelná posloupnost je tedy stejnoměrně integrovatelná. Podobně proces $X^+_\tau 1_{[n\geq\tau]}$ je dominovaný integrovatelnou veličinou $X^+_\tau\in\mathbb{L}_1$ a je tedy také stejnoměrně integrovatelný.

(b) Platí-li levá strana, pak je proces $X^+_{\tau\wedge n}$ dominován stejnoměrně integrovatelným procesem $E[X^+_\tau|\mathcal{F}_n]$, a je tedy také stejnoměrně integrovatelný. Nechť naopak platí pravá strana. Pak dle (a) platí $X^+_\tau\in\mathbb{L}_1$. Protože je proces $X^+_{\tau\wedge n}$ $\mathcal{F}_n$-submartingal, dostaneme z optional stopping theorem, že

$$X^+_{\tau\wedge n}\overset{\text{sj}}{\leq} E[X^+_{\tau\wedge m}|\mathcal{F}_n]\to E[X^+_\tau|\mathcal{F}_n] \quad \text{v } \mathbb{L}_1 \quad \text{pro } n\leq m\to\infty.$$

Zde jsme využili předpokladu, že $X^+_{\tau\wedge n}$ je stejnoměrně integrovatelný proces, což dává konvergenci $X^+_{\tau\wedge n}\to X^+_\tau$ v $\mathbb{L}_1$ pro $n\to\infty$. Dál už jen využíváme toho, že podmíněná střední hodnota zachovává konvergenci v $\mathbb{L}_1$.

***Q.E.D.***

Dále budeme podmínku $(Y_t, t\in T)$ je stejnoměrně integrovatelný proces zapisovat ve tvaru $\boldsymbol{Y_t\in SI}$.

**Tvrzení 13*** Buď $(X_n, n\in\mathbb{N}_0)$ $\mathcal{F}_n$-submartingal a $\nu\leq\tau\overset{\text{sj}}{<}\infty$ $\mathcal{F}_n$-markovské časy. Je-li $X^+_{\tau\wedge n}\in\text{SI}$, pak

$$X_\nu, X_\tau\in\mathbb{L}_1,\quad X_\nu\overset{\text{sj}}{\leq} E[X_\tau|\mathcal{F}_\nu].$$

**Důkaz:** Protože $X^+_{\tau\wedge n}\in\text{SI}$, platí $X^+_n 1_{[n<\tau]}\in\text{SI}$ a $X^+_\tau\in\mathbb{L}_1$. Z poznámky pak máme odhad

$$EX^-_\tau\leq EX^+_\tau - EX_0<\infty.$$

[13] Čtenáři jako cvičení doporučuji si ukázat, že levá strana je ekvivalentní podmínce $EX^+_{\tau\wedge n}\to EX^+_\tau<\infty$ pro $n\to\infty$ a pomyslet na to, že tato frekventovaná podmínka ekvivalentní se stejnoměrnou inegrovatelností zastaveného procesu $X^+_{\tau\wedge n}$ je ve své podstatě spojitostí v $\mathbb{L}_1$ ve smyslu $X^+_{\tau\wedge n}\to X^+_\tau$ v $\mathbb{L}_1$.

Celkem tak platí $X_\tau \in \mathbb{L}_1$. K ověření předpokladů tvrzení 13 zbývá ukázat, že $X_\nu \in \mathbb{L}_1$. To lze ukázat naprosto stejně, jako pro $\tau$, ověříme-li, že je splněn předpoklad $X^+_{\nu\wedge n} \in$ SI. Z tvrzení 12 a 14 (b) dostaneme

$$X^+_{\nu\wedge n} \overset{\text{sj}}{\leq} E[X^+_{\tau\wedge n}|\mathcal{F}_{\nu\wedge n}] \overset{\text{sj}}{\leq} E[E(X^+_\tau|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_{\nu\wedge n}] \overset{\text{sj}}{=} E[X^+_\tau|\mathcal{F}_{\nu\wedge n}].$$

Proces $X^+_{\nu\wedge n}$ je tedy dominován stejnoměrně integrovatelným procesem, a je tedy sám stejnoměrně integrovatelný. Nyní $\nu$ splňuje stejné podmínky, jaké jsme v předpokladech kladli na $\tau$ a tak i pro $\nu$ platí $X_\nu \in \mathbb{L}_1$. Protože jsme ověřili předpoklady tvrzení 13, platí i odpovídající závěr. ***Q.E.D.***

**Poznámka** (i) Speciálně, je-li proces $X_n$ shora omezen, či jen zastavený proces $X_{\tau\wedge n}$, pak je podmínka stejnoměrné integrovatelnosti ze shora automaticky splněna. Stejně tak najdeme-li integrovatelnou veličinu, která proces majorizuje shora. Hledáme-li hranici, kam až v předpokladech můžeme ustoupit, dostaneme, že stačí předpokládat, že zastavený proces $X_{\tau\wedge n}$ je shora majorizovaný stejnoměrně integrovatelným procesem, přičemž nám zřejmě stačí místo toho totéž předpokládat o nezastaveném procesu $X_n$.

(ii) Je-li $\tau_c = \inf\{n \in \mathbb{N}_0; X_n \geq c\} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_n)$, pak pro každý $\text{MČ}(\mathcal{F}_n) \ni \tau \leq \tau_c$ platí

$$\limsup_{n\to\infty} E[X^+_n; n < \tau] \leq c \lim_{n\to\infty} P(n < \tau) = c \cdot P(\tau = \infty).$$

Aby byla levá (i pravá strana) nulová, stačí pak již předpokládat, že $\tau \overset{\text{sj}}{<} \infty$.

(iii) Je-li čas $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ nezávislý s procesem $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$, pak je nejsnadnější ověřovat technické podmínky přímo výpočtem, neboť z předpokladu nezávislosti ihned dostaneme možnost vyčíslit

$$E[X^+_n; n < \tau] = EX^+_n \cdot P(n < \tau), \qquad EX^+_\tau = \sum_{n=0}^{\infty} EX^+_n \cdot P(\tau = n).$$

Ověřením odpovídajících podmínek se nám otevře možnost použít tvrzení 13 ovšem vzhledem k filtraci $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}^X_n \vee \sigma(\tau)$. Zřejmě $X_n \in \mathbb{A}(\mathcal{F}^X_n) \subseteq \mathbb{A}(\mathcal{F}_n)$ a také $\tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_n)$, neboť $[\tau \leq n] \in \sigma(\tau) \subseteq \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_n$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.

**Věta (Optional Sampling Theorem - věta o probuzení)**[14] Buď $\text{MČ}(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0) \ni \tau_k \overset{\text{sj}}{<} \infty$ neklesající posloupnost markovských časů.

(a) Je-li $X_n$ $\mathcal{F}_n$-submartingal a (i) $X^+_{n\wedge\tau_k} \in$ SI nebo ekvivalentně (ii) $X^+_{\tau_k} \in \mathbb{L}_1$ a současně

$$\lim_{n\to\infty} E[X^+_n; n < \tau_k] = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Pak $X_{\tau_k}$ je $\mathcal{F}_{\tau_k}$-submartingal.

(b) Je-li $X_n$ $\mathcal{F}_n$-supermartingal a (i) $X^-_{n\wedge\tau_k} \in$ SI nebo ekvivalentně (ii) $X^-_{\tau_k} \in \mathbb{L}_1$ a současně

$$\lim_{n\to\infty} E[X^-_n; n < \tau_k] = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Pak $X_{\tau_k}$ je $\mathcal{F}_{\tau_k}$-supermartingal.

(c) Je-li $X_n$ $\mathcal{F}_n$-martingal a (i) $X_{n\wedge\tau_k} \in$ SI nebo ekvivalentně (ii) $|X_{\tau_k}| \in \mathbb{L}_1$ a současně

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n|; n < \tau_k] = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Pak $X_{\tau_k}$ je $\mathcal{F}_{\tau_k}$-martingal.

**Lemma 7** Buď $X_n \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0)$ integrovatelný proces. Pak $X_{\tau\wedge n} \in$ SI platí za předpokladu, že

$$\exists\ n_0 \in \mathbb{N}_0 \quad \sup_{n\geq n_0} E[|X_{n+1} - X_n||\mathcal{F}_n] \cdot 1_{[n<\tau]} \in \mathbb{L}_\infty.$$

**Důkaz:** Najdeme integrovatelnou majorantu pro

$$|X_{n\wedge\tau}| \leq \sup_{n\leq n_0} |X_n| + \sum_{n_0\leq k<\tau} |X_{k+1} - X_k|.$$

První člen napravo je zřejmě jako supremum konečně mnoha integrovatelných veličin integrovatelné. Buď $c \in (0, \infty)$ takové, že pro každé $k \geq n_0$ platí

$$E[|X_{k+1} - X_k||\mathcal{F}_k] \cdot 1_{[k<\tau]} \overset{\text{sj}}{\leq} c.$$

[14] Markovské časy $\tau_k$ zde interpretujeme jako okamžiky probuzení, po kterém zaznamenáme napozorovanou hodnotu sledovaného procesu, a pak opět usneme až do dalšího probuzení.

Protože $\tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_k)$, platí $[k < \tau] \in \mathcal{F}_k$, a dle definice podmíněné střední hodnoty pak

$$E[|X_{k+1} - X_k|; k < \tau] \le E[c; k < \tau] = c\, P(k < \tau)$$

kdykoli $k \ge n_0$. Střední hodnotu druhého členu v první odsazené formuli důkazu je omezena hodnotou

$$E \sum_{n_0 \le k < \tau} |X_{k+1} - X_k| = \sum_{k=n_0}^{\infty} E[|X_{k+1} - X_k|; k < \tau] \le c \sum_{k=n_0}^{\infty} P(k < \tau) < \infty,$$

protože dle předpokladu $\tau \in \mathbb{L}_1$. ***Q.E.D.***

**Lemma 8** Buď $0 \le X_n$ $\mathcal{F}_n$-submartingal s rozkladem $X_n = M_n + K_n$ na $\mathcal{F}_n$-martingal $M_n$ a $\mathcal{F}_n$-kompenzátor $K_n$. Pokud $\text{MČ}(\mathcal{F}_n) \ni \tau \overset{\text{sj}}{<} \infty$ splňuje $K_\tau \in \mathbb{L}_1$, pak také $X_\tau, M_\tau \in \mathbb{L}_1$.

**Důkaz:** Dle Fautuova lemmatu platí

$$0 \le EX_\tau \le \liminf_{n\to\infty} (EM_{\tau\wedge n} + EK_{\tau\wedge n}) = EM_0 + EK_\tau < \infty,$$

přičemž jsme použili nejprve Optional Stopping Theorem říkající, že $M_{\tau\wedge n}$ je $\mathcal{F}_n$-martingal, což pro nás v konečném důsledku znamená rovnost $EM_{\tau\wedge n} = EM_0$, a pak jsme také použili Léviho větu o monotónní konvergenci říkající, že $EK_{\tau\wedge n} \uparrow EK_\tau$, neboť kompenzátor $K_n$ jakožto kompenzátor $\mathcal{F}_n$-submartingalu je neklesající proces zdola omezený svou počáteční hodnotou, která je nutně integrovatelná. Zbytek už pak plyne z rozpisu $M_\tau = X_\tau + K_\tau \in \mathbb{L}_1$.

***Q.E.D.***

Buďte $X_k, k \in \mathbb{N}$ nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny. O procesu $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ pak řekneme, že je to ***náhodná procházka s krokem*** $X_n = S_n - S_{n-1}$. Buď navíc $(\mathcal{F}_k, k \in \mathbb{N}_0)$ filtrace. Pak řekneme, že proces $S_n$ je ***$\mathcal{F}_n$-náhodná procházka***, pokud $S_n \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_n)$ a pokud její krok $X_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ je nezávislý s $\mathcal{F}_n$ pro $n \in \mathbb{N}_0$.

**Příklady** Buď $S_n$ $\mathcal{F}_n$-náhodná procházka s krokem $X_n = S_n - S_{n-1}$.

(1) Je-li $X_1 \in \mathbb{L}_1$, pak $\boldsymbol{\mathbb{S}_n = S_n - ES_n = S_n - n \cdot EX_1}$ je $\mathcal{F}_n$-martingal.
(2) Je-li $X_1 \in \mathbb{L}_2$, pak $\boldsymbol{V_n = \mathbb{S}_n^2 - E\mathbb{S}_n^2 = \mathbb{S}_n^2 - n\sigma^2}$ je $\mathcal{F}_n$-martingal, kde $\sigma^2 = \text{var}(X_1)$.
(3) Je-li $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\beta = \ln E \exp\{\alpha X_1\} \in \mathbb{R}$, pak $\boldsymbol{\mathcal{E}_n = \exp\{\alpha S_n - n\beta\}}$ je $\mathcal{F}_n$-martingal.

**Věta (Waldovy rovnosti I)** Buď $(S_n, n \in \mathbb{N}_0)$ $\mathcal{F}_n$-náhodná procházka a $\nu \le \tau \overset{\text{sj}}{<} \infty$ $\mathcal{F}_n$-markovské časy.
(i) Je-li $X_1, \tau \in \mathbb{L}_1$, pak $\mathbb{S}_\nu \overset{\text{sj}}{=} E[\mathbb{S}_\tau | \mathcal{F}_\nu]$.
(ii) Nechť $X_1^2, \tau \in \mathbb{L}_1$, pak $V_\nu \overset{\text{sj}}{=} E[V_\tau | \mathcal{F}_\nu]$, pokud (a) $\tau \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_\infty^S$ nebo (b) pokud platí (10), kde

(10) $$(\exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0) \quad \sup_{n \ge n_0} |\mathbb{S}_n| \cdot 1_{[n<\tau]} \in \mathbb{L}_\infty.$$

(iii) Nechť $\alpha \in \mathbb{R}, \beta = \ln E e^{\alpha X_1} \in \mathbb{R}$, pak $\mathcal{E}_\nu \overset{\text{sj}}{=} E[\mathcal{E}_\tau | \mathcal{F}_\nu]$, pokud (a) $\tau \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_\infty^S$ nebo (b) $X_1 \in \mathbb{L}_1$ & (10).

**Důkaz:** (i) Zřejmě $E[|\mathbb{S}_{n+1} - \mathbb{S}_n||\mathcal{F}_n] = E[|\mathbb{X}_{n+1}||\mathcal{F}_n] = E|\mathbb{X}_{n+1}| = E|\mathbb{X}_1|$, neboť $\mathbb{X}_{n+1} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0$. Dle lemmatu 7 pak $\mathbb{S}_{\tau\wedge n} \in \text{SI}$ a platí tedy rovnost $\mathbb{S}_\nu \overset{\text{sj}}{=} E[\mathbb{S}_\tau|\mathcal{F}_\nu]$ dle Optional Sampling Theorem.
(ii) Proces $0 \le \mathbb{S}_n^2$ je zřejmě $\mathcal{F}_n$-submartingal s kompenzátorem např. $K_n = n\sigma^2$. Dále $EK_\tau = \sigma^2 E\tau < \infty$ dle předpokladu. Dle lemmatu 8 pak platí $\mathbb{S}_\tau^2, V_\tau \in \mathbb{L}_1$.
(a) Přímo výpočtem s využitím předpokladu $\tau \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_\infty^S = \mathcal{F}_\infty^{\mathbb{S}} \supseteq \mathcal{F}_\infty^V$ ověříme technický předpoklad

$$E[|V_n|; n < \tau] = E|V_n| \cdot P(n < \tau) \le 2\sigma^2 n P(n < \tau) \le 2\sigma^2 E[\tau; n < \tau] \to 0, \quad n \to \infty,$$

neboť $\tau \in \mathbb{L}_1$ a neboť

$$E|V_n| = E|\mathbb{S}_n^2 - n\sigma^2| \le n\sigma^2 + E|\mathbb{S}_n|^2 = n\sigma^2 + \text{var}(\mathbb{S}_n) = 2n\sigma^2.$$

(b) Nyní spočteme $E[|V_{n+1} - V_n|; n < \tau]$. Protože $\mathbb{S}_{n+1}^2 = (\mathbb{S}_n + \mathbb{X}_{n+1})^2 = \mathbb{S}_n^2 + 2\mathbb{S}_n\mathbb{X}_{n+1} + \mathbb{X}_{n+1}^2$, platí

$$|V_{n+1} - V_n| = |2\mathbb{S}_n\mathbb{X}_{n+1} + \mathbb{X}_{n+1}^2 - \sigma^2| \le \sigma^2 + 2|\mathbb{S}_n| \cdot |\mathbb{X}_{n+1}| + \mathbb{X}_n^2,$$

a z nezávislosti $\mathbb{X}_{n+1} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_n$ a měřitelnosti $\mathbb{S}_n \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_n)$ dostaneme

$$E[|V_{n+1} - V_n||\mathcal{F}_n] \overset{\text{sj}}{\le} \sigma^2 + 2|\mathbb{S}_n| E[|\mathbb{X}_{n+1}|\,|\mathcal{F}_n] + E[\mathbb{X}_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] = 2\sigma^2 + 2E|\mathbb{X}_1| \cdot |\mathbb{S}_n|.$$

Z předpokladu (10) pak dostaneme, že

$$\sup_{n \ge n_0} E[|V_{n+1} - V_n||\mathcal{F}_n] \cdot 1_{[n<\tau]} \le 2\sigma^2 + 2E|\mathbb{X}_1| \cdot \sup_{n \ge n_0} |\mathbb{S}_n| \cdot 1_{[n<\tau]} \in \mathbb{L}_\infty.$$

Použitím lemmatu 7 pak získáme, že $V_{\tau\wedge n} \in \mathrm{SI}$ a rovnost $V_\nu \overset{\text{sj}}{=} E[V_\tau|\mathcal{F}_\nu]$ pak z Optional Sampling Theorem.
(iii) Zřejmě $0 \leq \mathcal{E}_n$ je $\mathcal{F}_n$-martingal a tedy nezáporný $\mathcal{F}_n$-submartingal s kompenzátorem např. $K_n \equiv 0$. Zřejmě $K_\tau = 0 \in \mathbb{L}_1$, a dle lemmatu 8 tak platí $\mathcal{E}_\tau \in \mathbb{L}_1$.
(a) Přímo výpočtem s využitím předpokladu $\tau \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}^S_\infty = \mathcal{F}^{\mathbb{S}}_\infty \supseteq \mathcal{F}^V_\infty$ ověříme technický předpoklad

$$E[|\mathcal{E}_n|; n < \tau] = E\mathcal{E}_n \cdot P(n < \tau) \leq P(n < \tau) \to 0, \quad n \to \infty.$$

(b) Z Jensenovy nerovnosti dostaneme, že $\beta = \ln Ee^{\alpha X_1} \geq \alpha EX_1$, z čehož odvozujeme, že

$$\mathcal{E}_n = e^{\alpha S_n - \beta n} = e^{\alpha \mathbb{S}_n - (\beta - \alpha EX_1)n} \leq e^{\alpha \mathbb{S}_n}.$$

Dále

$$E[|\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n||\mathcal{F}_n] = \mathcal{E}_n \cdot E[|e^{\alpha X_{n+1} - \beta} - 1|\,|\mathcal{F}_n] = \mathcal{E}_n \cdot E|e^{\alpha X_1 - \beta} - 1|.$$

Celkem tak dostáváme

$$\sup_{n\geq n_0} E[|\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n||\mathcal{F}_n] \cdot 1_{[n<\tau]} \leq E|e^{\alpha X_1 - \beta} - 1| \cdot \exp\{|\alpha| \cdot \sup_{n\geq n_0} |\mathbb{S}_n| \cdot 1_{[n<\tau]}\} \in \mathbb{L}_\infty.$$

**Věta (Waldovy rovnosti II)** Buď $(S_n, n \in \mathbb{N}_0)$ $\mathcal{F}_n$-náhodná procházka a MČ $\ni \tau \overset{\text{sj}}{<} \infty$.
(i) Pokud $X_1, \tau \in \mathbb{L}_1$, pak $ES_\tau = E\tau \cdot EX_1$.
(ii) Nechť $X_1^2, \tau \in \mathbb{L}_1$. Pokud $\tau \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}^S_\infty$ nebo pokud platí (10), pak $\mathrm{var}(\mathbb{S}_\tau) = E\tau \cdot \mathrm{var}(X_1)$.
Pokud navíc $\tau \in \mathbb{L}_2$, pak $S_\tau \in \mathbb{L}_2$ a

$$\mathrm{var}(S_\tau) = E\tau \cdot \mathrm{var}(X_1) + \mathrm{var}(\tau) \cdot (EX_1)^2 + 2EX_1 \cdot \mathrm{cov}(\tau, \mathbb{S}_\tau),$$

přičemž z případě $\tau \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}^S_\infty$ je poslední napravo člen roven nule.
(iii) Nechť $\alpha \in \mathbb{R}, \beta = \ln Ee^{\alpha X_1} \in \mathbb{R}$. Pokud $\tau \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}^S_\infty$ nebo $X_1, \tau \in \mathbb{L}_1$ & (10), pak $E\mathcal{E}_\tau = 1$.

**Důkaz:** Volíme MČ$(\mathcal{F}_n) \ni \nu = 0 \leq \tau$. Pak zřejmě $S_\nu = \mathbb{S}_\nu = 0$, dále $V_\nu = 0$ a $\mathcal{E}_\nu = 1$.
(i) Dle Waldových rovností (i) platí

$$0 = E\mathbb{S}_\nu = E\mathbb{S}_\tau = E(S_\tau - \tau \cdot EX_1) = ES_\tau - EX_1 \cdot E\tau.$$

(ii) Dle Waldových rovností I (ii) platí

$$0 = EV_\nu = EV_\tau = E[\mathbb{S}^2_\tau - \tau \cdot \mathrm{var}(X_1)] = E\mathbb{S}^2_\tau - \mathrm{var}(X_1) \cdot E\tau = \mathrm{var}(\mathbb{S}_\tau) - \mathrm{var}(X_1) \cdot E\tau.$$

Dále

$$\mathrm{var}(S_\tau) = \mathrm{var}(\mathbb{S}_\tau + \tau \cdot EX_1) = \mathrm{var}(\mathbb{S}_\tau) + (EX_1)^2 \cdot \mathrm{var}(\tau) + 2EX_1 \cdot \mathrm{cov}(\tau, \mathbb{S}_\tau).$$

Je-li $\tau \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}^S_\infty$, pak z rovnosti $E\mathbb{S}_n = 0$ a z předpokladu nezávislosti dostaneme, že

$$\mathrm{cov}(\tau, \mathbb{S}_\tau) = E(\tau \cdot \mathbb{S}_\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, ES_n \cdot P(\tau = n) = 0.$$

(iii) Dle Waldových rovností I (iii) platí $1 = E\mathcal{E}_\nu = E\mathcal{E}_\tau$. ***Q.E.D.***

## 6. Maximální nerovnosti

Pro potřeby dále využívané Jensenovy nerovnosti zavedeme zobecněnou střední hodnotu pro reálný náhodný vektor. Buď $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ $n$-rozměrný reálný náhodný vektor a $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ $\sigma$-algebra. Označme $P_{X|\mathcal{F}}$ podmíněné rozdělení[15] $X$, pak předpisem

$$\bar{E}[X|\mathcal{F}] = \int x \; P_{X|\mathcal{F}}(\mathrm{d}x)$$

definujeme ***zobecněnou podmíněnou střední hodnotu $X$ za podmínky $\mathcal{F}$*** a to pro taková $\omega \in \Omega$, pro která je pravá strana dobře definována. Je-li $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ borelovské zobrazení, pak $P_{X|\mathcal{F}} \circ f^{-1} \overset{\text{sj}}{=} P_{f(X)|\mathcal{F}}$, a tak pro $\omega \in \Omega$, pro která je levá strana dobře definována, dostáváme rovnost až na $\mathcal{F}$-měřitelnou množinu míry $P$ nula rovnost

$$\int f(x) \; P_{X|\mathcal{F}}(\mathrm{d}x) = \int \varphi \; P_{f(X)|\mathcal{F}}(\mathrm{d}\varphi) = \bar{E}[f(X)|\mathcal{F}].$$

Pro další účely připomeneme Jensenovu nerovnost pro střední hodnotu z TP1.

[15] Protože $\mathbb{R}^n$ je úplný separabilní metrický prostor s borelovskou $\sigma$-algebrou $\mathcal{B}^n$, existuje regulární verze podmíněné pravděpodobnosti $B \in \mathcal{B}^n \mapsto P(X \in B|\mathcal{F})$, kterou označujeme jako ***podmíněné rozdělení $X$ za podmínky $\mathcal{F}$*** a značíme ***$P_{X|\mathcal{F}}$***.

**Jensenova nerovnost** Buď $D \subseteq \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ konvexní množina a $D \overset{\text{sj}}{\ni} X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ $n$-rozměrný reálný náhodný vektor. Pokud $EX = (EX_1, \dots, EX_n)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^n$, pak $EX \in D$. Je-li navíc $f : D \to \mathbb{R}$ konvexní funkce, pak

$$Ef(X) \geq f(EX),$$

přičemž levá strana existuje a může nabývat reálných hodnot, případně také $\infty$.

**Poznámka:** Jensenova nerovnost platí i v případě, že funkce $f : D \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ je nevlastní, tj. pokud připouštíme i hodnotu $\infty$.

**Důkaz:** Označme $D^* = \{x \in D : f(x) \in \mathbb{R}\}$, pak tato množina je jistě konvexní. Pokud $X \overset{\text{sj}}{\in} D^*$, pak

$$Ef(X) = Ef^*(X) \geq f^*(EX) = f(EX), \qquad \text{kde} \qquad f^* = f|_{D^*}.$$

Pokud $X \overset{\text{sj}}{\notin} D^*$, pak $Ef(X) = \infty$, a tak opět požadovaná nerovnost platí.

**Jensenova nerovnost pro zobecněnou podmíněnou střední hodnotu** Buď $D \subseteq \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ konvexní množina, $D \overset{\text{sj}}{\ni} X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ $n$-rozměrný reálný náhodný vektor a $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ sub-$\sigma$-algebra. Pokud $X \in \mathbb{L}_1^n$, pak $E[X|\mathcal{F}] \overset{\text{sj}}{\in} D$. Je-li navíc $f : D \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvexní funkce, pak

$$\bar{E}[f(X)|\mathcal{F}] \geq f(E[X|\mathcal{F}]),$$

přičemž levá strana existuje a může nabývat reálných hodnot, případně také $\infty$.

Proces $X = (X_t, t \in T)$ se stavovým prostorem $(\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}})$ nazveme ***$\mathcal{F}_t$-adaptovaným***, pokud pro každé $t \in T$ platí $X_t \in \mathbb{L}^*(\mathcal{F}_t)$, což stručně zapisujeme $X_t \in \bar{\mathbb{A}}(\mathcal{F}_t)$. Řekneme, že proces $X \in \bar{\mathbb{A}}(\mathcal{F}_t)$ je ***zobecněný $\mathcal{F}_t$-submartingal***, pokud pro každé $(s,t) \in T^{(2)}$ platí

$$X_s \overset{\text{sj}}{\leq} \bar{E}[X_t|\mathcal{F}_s].$$

Speciálně veličina $X_t$ je zdola $P_{X|\mathcal{F}_s}$-integrovatelná skoro jistě. Je-li proces $X_t \in \bar{\mathbb{A}}(\mathcal{F}_t)$ je zobecněný $\mathcal{F}_t$-submartingal, pak

$$E[X_t; F] \geq E[X_s; F], \quad F \in \mathcal{F}_s, \quad (s,t) \in T^{(2)}.$$

**Jensenova nerovnost pro martingal a submartingal** Buď $D \subseteq \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ konvexní množina, $X_t \overset{\text{sj}}{\in} D$ $n$-rozměrný $\mathcal{F}_t$-martingal a $Y_t \overset{\text{sj}}{\in} D$ $n$-rozměrný $\mathcal{F}_t$-submartingal,[16] pak pro konvexní funkci $f : D \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ a neklesající konvexní funkci $g : D \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ jsou procesy $f(X_t), g(Y_t)$ zobecněné $\mathcal{F}_t$-submartingaly.

**Důkaz:** Pro $(s,t) \in T^{(2)}$ z Jensenovy nerovnosti pro zoceněnou podmíněnou střední hodnotu dostaneme

$$\begin{aligned} f(X_s) &\overset{\text{sj}}{=} f(E[X_t|\mathcal{F}_s]) \overset{\text{sj}}{\leq} \bar{E}[f(X_t)|\mathcal{F}_s] \\ g(Y_s) &\overset{\text{sj}}{\leq} g(E[Y_t|\mathcal{F}_s]) \overset{\text{sj}}{\leq} \bar{E}[g(Y_t)|\mathcal{F}_s]. \end{aligned}$$

***Q.E.D.***

Je-li $X = (X_t, t \in T)$ (zobecněný) reálný náhodný proces, pak symbolem

$$\boldsymbol{X_t^*} = \sup_{s \in T_t} X_s = \sup X|_t, \quad t \in T \cup \{\infty\}$$

značíme ***průběžné (historické) maximum procesu $X$ do času $t$***. Dále pak symbolem

$$|\boldsymbol{X}|_{\boldsymbol{t}}^{\boldsymbol{*}} = |X_t|^* = \sup_{s \in T_t} |X_s|, \quad t \in T \cup \{\infty\}$$

značíme průběžné (historické) maximum absolutní hodnoty tohoto procesu.

**Věta (Martingalová nerovnost)** Buď $D \subseteq \mathbb{R}$ konvexní a $f : D \to [0, \infty]$ neklesající konvexní a $x \in D$. Buď $X_k \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_k)$ shora majorizovaný $\mathcal{F}_k$-(sub)martingalem $Y_k, k = 1, \dots, n$, přičemž oba procesy skoro jistě nabývají hodnot v množině $D$. Pak

$$f(x) \cdot P(X_n^* > x) \leq E[f(Y_n); X_n^* > x].$$

[16] Tím myslíme, že proces $X_t$ je složen z celkem $n$ $\mathcal{F}_t$-martingalů a proces $Y_t$ z $n$ $\mathcal{F}_t$-submartingalů.

**Důkaz:** Protože $f$ je neklesající konvexní funkce a $Y_k$ je $\mathcal{F}_k$-(sub)martingal, je proces $f(Y_k)$ zobecněným $\mathcal{F}_k$-submartingalem majorizujícím shora proces $X_k$. Buď $x \in D$ a $\tau = \inf\{k = 1, \dots, n; X_k > x\}$. Protože $f(X_k)$ je shora majorizovaný zobecněným $\mathcal{F}_k$-submartingalem $f(Y_k)$, platí

$$
\begin{aligned}
E[f(Y_n); X_n^* > x] &= \sum_{k=1}^{n} E[f(Y_n); \tau = k] \geq \sum_{k=1}^{n} E[f(Y_k); \tau = k] \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} E[f(X_k); \tau = k] \geq f(x) \sum_{k=1}^{n} P(\tau = k) = f(x) \cdot P(X_n^* > x).
\end{aligned}
$$

***Q.E.D.***

**Použití** V případech použití výše uvedené nerovnosti lze vždy postupovat následujícím způsobem. Najdeme[17] veličinu $Y \in \mathbb{L}_1$ takovou, že $E[Y|\mathcal{F}_k] \overset{\text{sj}}{\geq} X_k \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_k)$, což můžeme komentovat slovy, že ***veličina $Y$ shora uzavírá proces*** $X_k; k = 1, \dots, n$ ***vzhledem k filtraci*** $\mathcal{F}_k$. Pak $\mathcal{F}_k$-martingal $Y_k = E[Y|\mathcal{F}_k] \overset{\text{sj}}{\geq} X_k$ shora majorizuje proces $X_k$. Pak již stačí najít neklesající konvexní funkci $f$ (na konvexní množině) takovou, že $f(X_k), f(Y)$ jsou skoro jistě dobře definovány a předchozí věta nám dá nerovnost

$$
f(x) \cdot P(X_n^* > x) \leq E[f(Y); X_n^* > x], \qquad x \in \operatorname{def}(f).
$$

**Věta (Skorochodova nerovnost)** Buď $S_k, k \leq n$ náhodná procházka, pak pro $\varepsilon > 0$ platí

$$
P(|S|_n^* > \varepsilon + \eta) \cdot \min_{k \leq n} P(|S_n - S_k| \leq \eta) \leq P(|S_n| > \varepsilon).
$$

**Důkaz:** Zřejmě $[|S|_n^* > \varepsilon + \eta] = [\tau \leq n]$, kde $\tau = \inf\{k = 1, \dots, n : |S_k| > \varepsilon + \eta\}$. Pak

$$
P(|S_n| > \varepsilon) \geq P(|S_n > \varepsilon, \tau \leq n) = \sum_{k=1}^{n} P(|S_n| > \varepsilon, \tau = k).
$$

Protože $[\tau = k] \subseteq [|S_k| > \varepsilon + \eta]$ a protože z trojúhelníkové neorvnosti máme

$$
|S_n - S_k| \leq \eta \quad \& \quad |S_k| > \varepsilon + \eta \quad \Rightarrow \quad |S_n| \geq |S_k| - |S_n - S_k| > \varepsilon \quad \Mapsto \text{[18]} \quad |S_n| > \varepsilon, \text{[19]}
$$

dostáváme posléze i s využitím $[\tau = k] \in \mathcal{F}_k^S \perp\!\!\!\perp S_n - S_k$, že

$$
P(|S_n| > \varepsilon, \tau = k) \geq P(|S_n - S_k| \leq \eta, \tau = k) = P(|S_n - S_k| \leq \eta) \cdot P(\tau = k).
$$

Načítáním pak dostaneme nerovnost

$$
P(|S_n| > \varepsilon + \eta) \geq \sum_{k=1}^{n} P(|S_n - S_k| \leq \eta) \cdot P(\tau = k) \geq \min_{k \leq n} P(|S_n - S_k| \leq \eta) \cdot P(\tau \leq n).
$$

***Q.E.D.***

---

[17] Pravděpodobně nejmenší takovou veličinu dostaneme ve tvaru

$$
Y = X_n + \sum_{k=1}^{n} (X_{k-1} - E[X_k|\mathcal{F}_{k-1}])^+ = X_n + \sum_{k=1}^{n} (K_k - K_{k-1})^-,
$$

je-li $K_k$ kompenzátor procesu $X_k$. Tuto veličinu pak můžeme vnímat jako ***nejmenší horní $\mathcal{F}_k$-uzávěr*** procesu $X_k, k = 1, \dots, n$. Podobně proces $Y_k = E[Y|\mathcal{F}_k]$ jako ***horní $\mathcal{F}_k$-martingalovou obálku*** procesu $X_k, k = 1, \dots, n$ a proces

$$
Z_k = X_k + \sum_{j=1}^{k} (X_{j-1} - E[X_j|\mathcal{F}_{j-1}])^+ = X_k + \sum_{j=1}^{k} (K_j - K_{j-1})^-,
$$

který je nejmenším $\mathcal{F}_k$-submartingalem shora majorizujícím $X_k$, jako ***horní $\mathcal{F}_k$-submartingalovou obálku*** procesu $X_k$.

[18] Symbol $\Mapsto$ čteme "a tedy", přičemž zápis $A \Mapsto B$ znamená: platí výrok $A$ a současně platí výrok $A \Rightarrow B$. Tento zápis upřednostňujeme před zápisem $A$ & $B$, který logicky znamená totéž, ovšem z hlediska intuice je na jiné úrovni. Zápis $A \Mapsto B$ nevnímáme pouze jako výrok, ale přiřazujeme mu interpretaci ve tvaru: platí výrok $A$ a z jeho platnosti odvozujeme výrok $B$. V tomto zápise je zachycena určitá dynamika vážící se k tomu, odkud kam směřujeme a jaké máme úmysly. Podobně výrok $A \Rightarrow B$ je implikace, kterou můžeme interpretovat (použít) různými způsoby - v přímé formě nebo ve formě obměny $\not B \Rightarrow \not A$.

[19] Výrok $A \Rightarrow B \Mapsto C$ čteme: platí $A \Rightarrow B$ a současně platí $B \Rightarrow C$, z čehož následně odvozujeme, že platí $A \Rightarrow C$. Naopak zápisem $A \Mapsto B \Mapsto C$ rozumíme platí $A$ a současně platí $A \Rightarrow B$ a současně platí $B \Rightarrow C$, přičemž my z platnosti výroku $A$ usuzujeme na platnost výroku $B$ a posléze z platnosti výroku $B$ i na Platnost výroku $C$.

Řekneme, že reálná ***posloupnost*** $X_1, \ldots, X_n$ ***splňuje princip reflexe (zrcadlení)***, pokud

$$P_{X_1,\ldots,X_n} = P_{X_1,\ldots,X_k,-X_{k+1},\ldots,-X_n}, \quad k < n.$$

**Věta (Lévyho maximální nerovnost)** Nechť reálná náhondá posloupnost $X_1, \ldots, X_n$ splňuje princip reflexe, pak pro její částečné součty $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ platí nerovnost

$$P(|S|_n^* > x) \leq 2P(|S_n| > x), \quad x > 0.$$

**Důkaz:** Buď $S_n^{(k)} = 2S_k - S_n$ je posloupnost vzniklá z posloupnosti $S_n$ překlopením trajektorie od času $k \leq n$. Zřejmě

$$\tau = \inf\{k = 1, \ldots, n : |S_k| > x\} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_k^X),$$

a tak $F_k = [\tau = k] \in \mathcal{F}_k$. Dle předpokladu reflexe pak platí

$$(S_k, S_n - S_k, 1_{F_k}) \sim (S_k, S_k - S_n, 1_{F_k}) \quad \Rrightarrow \quad (S_n^{(k)}; 1_{F_k}) = (2S_k - S_n; 1_{F_k}) \sim (S_n; 1_{F_k}).$$

Protože dle trojúhelníkové neorovnosti platí

$$|S_n| \leq x \quad \& \quad |S_k| > x \quad \Rightarrow \quad |S_n^{(k)}| = |2S_k - S_n| \geq 2|S_k| - |S_n| \geq |x| \quad \Rrightarrow \quad |S_n^{(k)}| > x$$

a protože $\mathcal{F}_k \ni F_k = [\tau = k] \subseteq [|S_k| > x]$, platí

$$P(|S_n| > x, F_k) = P(|S_n^{(k)}| > x, F_k) \geq P(|S_n| \leq x, F_k).$$

Odsud odvozujeme, že

$$P(F_k) = P(|S_n| > x, F_k) + P(|S_n| \leq x, F_k) \leq 2P(|S_n| > x, F_k).$$

Nasčítáním (s vědomím, že $F_k = [\tau = k]$) pak dostaneme, že

$$P(|S|_n^* > x) = P(\tau \leq n) = \sum_{k=1}^n P(\tau = k) \leq 2 \sum_{k=1}^n P(|S_n| > x, \tau = k) = 2P(|S_n| > x, \tau \leq n) \leq 2P(|S_n| > x).$$

***Q.E.D.***

**Věta (Submartingalové maximální nerovnosti)** Nechť $(X_k)_{k=0}^n$ je submartingal, pak pro $\varepsilon > 0$ platí

$$P(X_n^* \geq \varepsilon) \leq \tfrac{1}{\varepsilon} E[X_n; X_n^* \geq \varepsilon] \leq \tfrac{1}{\varepsilon} EX_n^+.$$
$$P((-X)_n^* \geq \varepsilon) \leq \tfrac{1}{\varepsilon}[EX_n^+ - EX_0].$$

Spojením těchto nerovností pak dostaneme nerovnost

$$P(|X|_n^* \geq \varepsilon) \leq \tfrac{1}{\varepsilon}[2EX_n^+ - EX_0].$$

**Převrácení nerovností** Pro supermatingal $Y_k = -X_k$ ihned dostaneme analogické nerovnosti

$$P(Y_n^* \geq \varepsilon) \leq \tfrac{1}{\varepsilon}[EY_n^- + EY_0], \quad P((-Y)_n^* \geq \varepsilon) \leq \tfrac{1}{\varepsilon} EY_n^-, \quad P(|Y|_n^* \geq \varepsilon) \leq \tfrac{1}{\varepsilon}[2EY_n^- + EY_0].$$

**Důsledek (nerovnost pro martingaly)** Buď $(X_k)_{k=0}^n$ martingal, pak pro $\varepsilon > 0$ platí

$$P((\pm X)_n^* \geq \varepsilon) \leq \tfrac{1}{\varepsilon} EX_n^{\pm}, \qquad P(|X|_n^* \geq \varepsilon) \leq \tfrac{1}{\varepsilon^r} E|X_n|^r, \quad r \geq 1$$

**Důkaz:** Jediné, co je třeba dokazovat je poslední nerovnost, která plyne z věty použitím na submartingal $|X_k|^r$ v případě, že je to integrovatelný proces. V opačném případě $X_n \notin \mathbb{L}_r$ a v tom případě je pravá strana rovna $\infty$. Platí totiž $E|X_k|^r \leq E|E[X_n|\mathcal{F}_k^X]|^r \leq E|X|_n^r$ pro $k \leq n$. ***Q.E.D.***

**Důkaz věty:** Protože $\tau = \inf\{k = 0, \ldots, n : X_k \geq \varepsilon\} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_k^X)$, platí

$$[X_n^* \geq \varepsilon] = [X_\tau \geq \varepsilon] = [\tau \leq n] \in \mathcal{F}_{n\wedge\tau}.$$

Protože $E[X_n|\mathcal{F}_{\tau\wedge n}] \overset{\text{sj}}{\geq} X_{\tau\wedge n}$ dle tvrzení 12, dostáme z definice podmíněné střední hodnoty, že

$$EX_n^+ \geq E[X_n^+; \tau \leq n] \geq E[X_n; \tau \leq n] \geq E[X_{n\wedge\tau}; \tau \leq n] = E[X_\tau; X_\tau \geq \varepsilon] \geq \varepsilon \cdot P(X_\tau \geq \varepsilon) = \varepsilon \cdot P(X_n^* \geq \varepsilon).$$

Buď $Y_k = -X_k$ duální supermartingal. Pak $\nu = \inf\{k = 0, \ldots, n : Y_k \geq \varepsilon\} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_k^Y) = \text{MČ}(\mathcal{F}_k^X)$ a

$$[Y_n^* \geq \varepsilon] = [Y_\nu \geq \varepsilon] = [\nu \leq n] \in \mathcal{F}_{\nu\wedge n}.$$

Protože $EY_{\nu\wedge n} \leq EY_0$ dle např. tvrzení 12, platí

$$\begin{aligned}\varepsilon P(Y_n^* \geq \varepsilon) &= \varepsilon P(Y_\nu \geq \varepsilon) \leq E[Y_\nu; Y_\nu \geq \varepsilon] = E[Y_{\nu\wedge n}; \nu \leq n] = EY_{\nu\wedge n} - E[Y_{\nu\wedge n}; \nu > n] \\ &\leq EY_0 - E[Y_n; \nu > n] \leq EY_0 + EY_n^- = EX_n^+ - EX_0.\end{aligned}$$

Zbylá nerovnost i odpovídající důsledek plyne okamžitě z dokázaných nerovností. ***Q.E.D.***

**Věta (momentová maximální nerovnost pro martingaly)** Buď $(X_k)_{k=0}^n$ martingal a $r > 1$, pak

$$E(|X|_n^*)^r \leq (\tfrac{r}{r-1})^r \, E|X_n|^r.$$

**Důkaz:** Zřejmě můžeme předpokládat, že $0 \overset{\text{sj}}{\not\equiv} X_n \in \mathbb{L}_r$ v opačném případě je levá strana vzhledem k předpokladu $X_k \overset{\text{sj}}{=} E[X_n|\mathcal{F}_k^X]$ nulová nebo pravá $\infty$. Pak z nerovnosti[20] $E|X_k|^r \leq E|X_n|^r$ dostaneme

$$0 < E|X_n|^r \leq E(|X|_n^*)^r \leq \sum_{k=0}^{n} E|X_k|^r \leq (n+1) \cdot E|X_n|^r < \infty.$$

Ze vzorce pro výpočet střední hondoty z doplňkové distribuční funkce pro nezáporné veličiny

$$E|Y|^r = \int_0^\infty P(|Y|^r \geq x) \, \mathrm{d}x = r \int_0^\infty P(|Y| \geq y) \cdot y^{r-1} \, \mathrm{d}y$$

a s využitím maximální nerovnosti pro submartingal $|X_n|$ a Fubiniho věty dostaneme

$$E(|X|_n^*)^r = r \int_0^\infty P(|X|_n^* \geq x) \cdot x^{r-1} \, \mathrm{d}x \leq r \int_0^\infty E[|X_n|; |X|_n^* \geq x] \cdot x^{r-2} \, \mathrm{d}x = \tfrac{r}{r-1} \, E[|X_n| \cdot (|X|_n^*)^{r-1}].$$

Dále použijeme Hölderovu nerovnost s koeficienty $p = r$ a $q = (1 - \frac{1}{r})^{-1} = \frac{r}{r-1}$, přičemž dostaneme

$$E[|X_n| \cdot (|X|_n^*)^{r-1}] \leq (E|X_n|^r)^{\frac{1}{r}} \cdot [(E|X|_n^*)^r]^{\frac{r}{r-1}}.$$

Poskládáním obou nerovností a pokrácením dostaneme nerovnost pro normu v $\mathbb{L}_r$ ve tvaru

$$[E(|X|_n^*)^r]^{1/r} \leq \tfrac{r}{r-1} \, [E(|X_n|)^r]^{1/r},$$

což je ekvivalentní zápis požadované nerovnosti. ***Q.E.D.***

Buď $T \subseteq \mathbb{R}$ lokálně konečná množina. Pro $f : T \to \mathbb{R}$ a $(a, b) \in \mathbb{R}^{(2)}$ označme ***počet přeskoků*** intervalu $(a, b)$ ***směrem nahoru***

$$f{\uparrow}_a^b = \operatorname{card}\{(s,t) \in T^{(2)}; \operatorname*{rng}_{u \in (s,t) \cap T} f_u \subseteq (a,b) \subseteq [f_s, f_t]\}.$$

a analogicky ***počet přeskoků*** intervalu $(a, b)$ ***směrem dolů***

$$f{\downarrow}_a^b = \operatorname{card}\{(s,t) \in T^{(2)}; \operatorname*{rng}_{u \in (s,t) \cap T} f_u \subseteq (a,b) \subseteq [f_t, f_s]\}.$$

**Poznámka:** Je-li $X = (X_t, t \in T)$ náhodný proces a $T \subseteq \mathbb{R}$ lokálně konečná, pak pro $(a, b) \in \mathbb{R}^{(2)}$ platí

$$X{\uparrow}_a^b, X{\downarrow}_a^b \in \mathbb{L}^*(\mathcal{F}_\infty^X), \quad X{\uparrow}_a^b = (-X){\downarrow}_{-b}^{-a}, \quad X{\downarrow}_a^b -1 \leq X{\uparrow}_a^b \leq X{\downarrow}_a^b +1.$$

**Důkaz:** Zřejmě $X{\uparrow}_a^b = (-X){\downarrow}_{-b}^{-a}$ . Abychom ověřili $X{\downarrow}_a^b -1 \leq X{\uparrow}_a^b \leq X{\downarrow}_a^b +1$, stačí si uvědomit, že mezi každými sousedními přeskoky nahoru, musí být právě jeden přeskok dolů a naopak. Odpovídající počty se tak mohou lišit maximálně o hodnotu 1. Nyní zbývá pro $k \in \mathbb{N}$ ukázat, že platí $[X{\uparrow}_a^b \geq k] \in \mathcal{F}_\infty^X$, přičemž měřitelnost $X{\downarrow}_a^b$ následně dovodíme z měřitelnosti $X{\uparrow}_a^b = (-X){\downarrow}_{-b}^{-a} \in \mathbb{L}^*(\mathcal{F}_\infty^X)$. Zřejmě

$$[X{\uparrow}_a^b \geq k] = \bigcup_{t \in T^{(2k)}} \bigcup_{j=1}^{k} [X_{t_{2j-1}} \leq a] \cap [X_{t_{2j}} \geq b] \in \mathcal{F}_\infty^X,$$

neboť množina $T^{(2k)} \subseteq T^{2k}$ je spočetná. ***Q.E.D.***

**Tvrzení 15** Buď $(X_n)_{n=0}^\infty$ reálná náhodná posloupnost.

(i) Pokud $\forall\, (a, b) \in \mathbb{R}^{(2)}$ $X{\uparrow}_a^b \overset{\text{sj}}{<} \infty$, pak existuje $X^* \in \mathbb{L}^*(\mathcal{F}_\infty^X)$ taková, že $X_n \xrightarrow{\text{sj}} X^*$ pro $n \to \infty$.

(ii) Pokud navíc $\sup\{|X_n|; n \in \mathbb{N}_0\} \overset{\text{sj}}{<} \infty$, pak existuje $Y \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_\infty^X)$ taková, že $X_n \xrightarrow{\text{sj}} Y$ pro $n \to \infty$.

**Důkaz:** (i) Zřejmě $X^* = \limsup_n X_n \in \mathbb{L}^*(\mathcal{F}_\infty^X)$ a $X_* = \liminf_n X_n \in \mathbb{L}_*(\mathcal{F}_\infty^X)$. Dále

$$P(X_* < X^*) \leq \sum_{(a,b) \in \mathbb{Q}^{(2)}} P(X_* < a < b < X^*) \leq \sum_{(a,b) \in \mathbb{Q}^{(2)}} P(X{\uparrow}_a^b = \infty) = 0.$$

[20] Jde o Jensenovu nerovnost pro podmíněnou střední hodnotu, která říká, že $|X|_k^r \overset{\text{sj}}{\leq} E[|X_n|^r|\mathcal{F}_k^X]$, kde $X_k \overset{\text{sj}}{=} E[X_n|\mathcal{F}_k^X]$. Tady využíváme toho, že funkce $x \mapsto |x|^r$ je konvexní pro $r \geq 1$.

Platí tedy, že $X_n \xrightarrow{\text{sj}} X^* \overset{\text{sj}}{=} X_*$ pro $n \to \infty$. (ii) Nyní $Y = X^* \cdot 1_{[|X^*|<\infty]} \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_\infty^X)$, přičemž
$$|X^*| \le \sup_{n\in\mathbb{N}_0} |X_n| \overset{\text{sj}}{<} \infty, \quad \text{a tedy} \quad Y \overset{\text{sj}}{=} X^* \overset{\text{sj}}{=} \lim_{n\to\infty} X_n.$$

***Q.E.D.***

**Věta (Doobova nerovnost)** Buď $(X_k)_{k=0}^n$ $\mathcal{F}_k$-submartingal a $(a,b) \in \mathrm{R}^{(2)}$. Pak
$$EX{\uparrow}_a^b \le \tfrac{E(X_n-a)^+ - E(X_0-a)^+}{b-a} \le \tfrac{E(X_n-a)^+}{b-a}.$$
**Obrácení pro supermartingal:** Pro proces $Y_k = -X_k$ platí
$$EY{\downarrow}_a^b = EX{\uparrow}_{-b}^{-a} \le \tfrac{E(b+X_n)^+ - E(b+X_0)^+}{b-a} \le \tfrac{E(X_n-a)^+}{b-a} = \tfrac{E(b-Y_n)^+ - E(b-Y_0)^+}{b-a} \le \tfrac{E(b-Y_n)^+}{b-a}.$$
**Důkaz:** Proces $Z_k = (X_k - a)^+$ je zřejmě $\mathcal{F}_k$-submartingal a $Z{\uparrow}_0^{b-a} = X{\uparrow}_a^b$. Označme $\tau_0 = 0$,
$$\nu_j = \inf\{k \ge \tau_{j-1}; Z_k = 0\} \le \tau_j = \inf\{k \ge \nu_j; Z_k \ge b-a\}.$$
Pak pro dostatečné velké $j$ dejme tomu pro $j = m$ platí $\nu_j = \tau_j = \infty$ všude. Pak
$$Z_n - Z_0 = Z_{n\wedge\tau_m} - Z_{n\wedge\tau_0} = \sum_{j=1}^m (Z_{n\wedge\tau_j} - Z_{n\wedge\nu_j}) + \sum_{j=1}^m (Z_{n\wedge\nu_j} - Z_{n\wedge\tau_{j-1}}) \ge (b-a)X{\uparrow}_a^b + \sum_{j=1}^m Z_{n\wedge\nu_j} - Z_{n\wedge\tau_{j-1}},$$
neboť při označení jevem $A_j$, že k $j$-tému přeskoku intervalu $(a,b)$ procesem $X$ došlo, platí
$$Z_{n\wedge\tau_j} - Z_{n\wedge\nu_j} \ge (b-a)\cdot 1_{A_j}.$$
Protože je proces $Z_k$ $\mathcal{F}_k$-submartingalem a $\nu_j \wedge n \le \tau_j \wedge n \le n$ jsou omezené markovské časy, platí také dle tvrzení 12, že $EZ_{n\wedge\nu_j} \ge EZ_{n\wedge\tau_{j-1}}$. Celkem tak dostáváme, že
$$(b-a)EX{\uparrow}_a^b = (b-a)EZ{\uparrow}_0^{b-a} \le EZ_n - EZ_0 = E(X_n-a)^+ - E(X_0-a)^+ \le E(X_n-a)^+.$$

***Q.E.D.***

**Věta (konvergence submartingalů)** a) Buď $(X_n)_{n=0}^\infty$ $\mathcal{F}_n$-submartingal splňující $\sup_n EX_n^+ < \infty$. Pak $X_n$ má limitu skoro jistě, z čehož v doporovodné poznámce ozvodíme, že tato limita je v $\mathbb{L}_1$. Lze tedy v konečném důsledku psát
$$\exists\, X_\infty \in \mathbb{L}_1 \quad X_n \xrightarrow{\text{sj}} X_\infty, \qquad n\to\infty.$$
b) Buď $(X_m)_{m=-\infty}^0$ $\mathcal{F}_m$-submartingal. Pak $X_m$ má limitu skoro jistě, tj.
$$\exists\, X_{-\infty} \in \mathbb{L}^* \quad X_{-n} \xrightarrow{\text{sj}} X_{-\infty}, \quad n\to\infty.$$
**Doplnění nerovností a důsledky:** V případech a), b) budeme dokazovat, že $X_n, X_{-n}$ mají limitu skoro jistě. Nyní odvodíme nerovnosti pro střední hodnotu kladné a záporné části limity. Pokud ukážeme, že kladná i záporná část, jsou integrovatelné, máme konečnost veličiny, dejme tomu $X$, skoro jistě. Pak již stačí uvažovat veličinu $X_{\pm\infty} = X \cdot 1_{[X\in\mathbb{R}]}$. V obou dvou případech mechanicky používáme Fautuovo lemma na kladnou a zápornou část. V obou dvou případech budeme vycházet z existence limity skoro jistě, kteru budeme značit $X$, kterou obdržíme z následného důkazu věty. a) Fatuovo lemma nám dává
$$EX^+ \le \liminf_{n\to\infty} EX_n \le \sup_{n\in\mathbb{N}} EX_n < \infty$$
dle předpokladu. Podobně pro zápornou část z Fatouova lemmatu a nerovnosti $EX_n \ge EX_0$ dostáváme
$$EX^- \le \liminf_{n\to\infty} EX_n^- = \liminf_{n\to\infty}(EX_n^- - EX_n) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} EX_n^+ - EX_0 < \infty.$$
b) Nechť $X_{-n} \to X$ pro $n\to\infty$, pak z Fatouova lemmatu z nerovnosti $EX_{-n} \le EX_0$ dostáváme
$$EX^+ \le \liminf_{n\to\infty} EX_{-n}^+ \le EX_0^+ < \infty.$$
a pro zápornou část máme opět z Fatouova lemmatu nerovnost
$$EX^- \le \liminf_{n\to\infty} EX_n^- \le \sup_{n\in\mathbb{N}} EX_n^-.$$
Ve větě b) tak jsme schopni psát $X_{-\infty} \in \mathbb{L}_1$ za předpokladu, že $\sup_n EX_n^- < \infty$.

**Důkaz:** a) Buď $(a,b) \in \mathbb{R}^{(2)}$, pak z předpokladu $\sup_n EX_n^+ < \infty$ a Doobovy nerovnosti dostaneme
$$EX{\uparrow}_a^b = \lim_{n\to\infty} E(X_k)_{k=0}^n{\uparrow}_a^b \le \lim_{n\to\infty} \tfrac{E(X_n-a)^+}{b-a} \le \tfrac{\sup_n EX_n^+ + |a|}{b-a} < \infty.$$

b) Podobně tentokrát pro indexovou množinu s maximálním prvkem bez omezujícího předpokladu dostaneme

$$EX\!\uparrow_a^b = \lim_{n\to\infty} E(X_k)_{k=-n}^0\!\uparrow_a^b \le \tfrac{E(X_0-a)^+}{b-a} < \infty.$$ ***Q.E.D.***

**Tvrzení** Buď $(X_t, t \in (0,1))$ submartingal a $s \in (0,1)$. Pak existují veličiny, které nyní svérázně označím $X_{s\pm} \in \mathbb{L}_1$ (což vyjímečně zde neznamená limity zleva či zprava), pro které platí

$$X_t \xrightarrow{P} X_{s+}, \quad t \to s^+, \qquad \& \qquad X_t \xrightarrow{P} X_{s-}, \quad t \to s^-.$$

**Důkaz:** Pro zatím z lenosti vynechávám. ***Q.E.D.***

**Věta (O konvergenci stejnoměrně integrovatelného (sub)-martingalu)**
a) Buď $(X_n)_{n=0}^\infty$ SI $\mathcal{F}_n$-submartingal, pak existuje $X_\infty \in \mathbb{L}_1$ taková, že $E[X_\infty|\mathcal{F}_n] \overset{\text{sj}}{\ge} X_n \xrightarrow{\text{sj},\mathbb{L}_1} X_\infty$.
b) Buď $(X_m)_{m=-\infty}^0$ SI $\mathcal{F}_n$-submartingal, pak existuje $X_{-\infty} \in \mathbb{L}_1$ taková, že $X_{-n} \xrightarrow{\text{sj},\mathbb{L}_1} X_{-\infty} \overset{\text{sj}}{\le} E[X_{-n}|\mathcal{F}_{-n}]$.

**Důkaz:** a) Z předpokladu stejnoměrné integrovatelnosti máme stejně omezené momenty a tím i splněn předpoklad pro použití věty o konvergenci submartingalu: $\sup_n EX_n^+ \le \sup_n E|X_n| < \infty$. Existuje tak veličina $X_\infty \in \mathbb{L}_1$ taková, že $X_n \xrightarrow{\text{sj}} X_\infty$. Konvergenci v $\mathbb{L}_1$ pak dostaneme z předpokladu SI. Protože podmíněná střední hodnota zachovává konvergenci v $\mathbb{L}_1$, platí

$$X_n \overset{\text{sj}}{\le} E[X_m|\mathcal{F}_n] \xrightarrow{\mathbb{L}_1} E[X_\infty|\mathcal{F}_n], \quad n \le m \to \infty.$$

b) Naprosto analogicky v tomto případě dostaneme konvergenci skoro jistě a následně z předpokladu SI i v $\mathbb{L}_1$, pokud na začátku ověříme předpoklad: $\sup_n EX_{-n}^- \le \sup_m E|X_m| < \infty \;\Leftarrow\;$ SI. Protože podmíněná střední hodnota zachovává konvergenci v $\mathbb{L}_1$, platí

$$E[X_{-n}|\mathcal{F}_{-n}] \overset{\text{sj}}{\ge} X_m \xrightarrow{\text{sj},\mathbb{L}_1} X_{-\infty}, \quad -n \ge m \to -\infty.$$ ***Q.E.D.***

**Důsledek** Proces $(X_n)_{n=0}^\infty \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_n)$ je SI $\mathcal{F}_n$-martingal $\equiv$ existuje $X_\infty \in \mathbb{L}_1 ::\; X_n \overset{\text{sj}}{=} E[X_\infty|\mathcal{F}_n], n \in \mathbb{N}_0$.

**Tvrzení** Buď $Y \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $(\mathcal{F}_n)_N$ filtrace na $(\Omega, \mathcal{A})$, pak
a) $E[Y|\mathcal{F}_n] \xrightarrow{\text{sj},\mathbb{L}_1} E[Y|\mathcal{F}_\infty]$ pro $n \to \infty$, je-li $N = \mathbb{N}_0$.
b) $E[Y|\mathcal{F}_{-n}] \xrightarrow{\text{sj},\mathbb{L}_1} E[Y|\mathcal{F}_{-\infty}]$ pro $n \to \infty$, je-li $N = \{-n, n \in \mathbb{N}_0\}$.

**Důkaz:** Víme, že $Y_n = E[Y|\mathcal{F}_n]$ je SI $\mathcal{F}_n$-martingal. Existuje tak $Y_\infty \in \mathbb{L}_1$ taková, že $Y_n \xrightarrow{\text{sj},\mathbb{L}_1} Y_\infty$. Zjevně bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $Y_\infty \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_\infty)$. Naším cílem je ukázat, že

$$E[Y|\mathcal{F}_\infty] \overset{\text{sj}}{=} E[Y_\infty|\mathcal{F}_\infty] \overset{\text{sj}}{=} Y_\infty.$$

Chceme tedy ukázat, že platí

$$E[Y;F] = E[Y_\infty;F], \quad F \in \mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_n \mathcal{F}_n). \tag{11}$$

Je-li $F \in \mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0$, pak z rovnosti $E[Y|\mathcal{F}_m] \overset{\text{sj}}{=} Y_m$ a z konvergence $Y_n \xrightarrow{\text{sj},\mathbb{L}_1} Y_\infty$ dostaneme

$$E[Y;F] = E[Y_m;F] \to E[Y_\infty;F], \quad n \le m \to \infty.$$

Rovnost (11) pak platí pro každou $F \in \cup_n \mathcal{F}_n$ tvořící algebru. Rovnají-li se dvě znaménkové míry na algebře, rovnají se i na $\sigma$-obalu $\mathcal{F}_\infty$, což lze obdržet přes techniku Dynkinova systému.

b) Opět $Y_m = E[Y|\mathcal{F}_m]$ je SI $\mathcal{F}_m$-martingal. Existuje tak $Y_{-\infty} \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_{-\infty})$ taková, že $Y_{-n} \xrightarrow{\text{sj},\mathbb{L}_1} Y_{-\infty}$. Pak

$$E[Y_{-\infty};F] = \lim_{n\to\infty} E[Y_{-n};F] = \lim_{n\to\infty} E[Y;F] = E[Y;F], \qquad F \in \mathcal{F}_{-\infty} = \cap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{F}_{-n}.$$

Platí tedy $E[Y|\mathcal{F}_{-n}] \overset{\text{sj}}{=} Y_{-n} \xrightarrow{\text{sj},\mathbb{L}_1} Y_{-\infty} \overset{\text{sj}}{=} E[Y|\mathcal{F}_{-\infty}]$ pro $n \to \infty$. ***Q.E.D.***

**Důsledek:** Buď $Y \in \mathbb{L}_1(\mathcal{A})$ a $(\mathcal{F}_t)_{(0,1)}$ filtrace na $(\Omega, \mathcal{A})$. Pak

$$Y_t = E[Y|\mathcal{F}_t] \xrightarrow{\mathbb{L}_1} E[Y|\mathcal{F}_{s-}], \quad t \to s^-,$$
$$Y_t = E[Y|\mathcal{F}_t] \xrightarrow{\mathbb{L}_1} E[Y|\mathcal{F}_{s+}], \quad t \to s^+.$$

**Věta (konvergence submartingalů II)** Buď $(X_n)_{n=0}^\infty$ submartingal s krokem $Y_n = X_n - X_{n-1}, n \in \mathbb{N}$. Pokud $(Y_\infty^*)^+ \in \mathbb{L}_1$, pak existuje $X_\infty \in \mathbb{L}$ taková, že

$$X_n \xrightarrow{\text{sj}} X_\infty \quad \text{na} \quad [X_\infty^* < \infty], \qquad \text{tj.} \qquad (X_n - X_\infty) \cdot 1_{[X_\infty^* < \infty]} \xrightarrow{\text{sj}} 0.$$

**Důkaz:** Pro $k \in \mathbb{N}$ označme $\tau_k = \inf\{n \in \mathbb{N}_0; X_n > k\} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_n^X)$. Dle Optional Stopping Theorem je proces $X_{n\wedge\tau_k}$ $\mathcal{F}_n^X$-submartingal kdykoli $k \in \mathbb{N}$. Z definice času $\tau_k$ rozborem případů

(1) $\tau_k = 0 \quad \Rightarrow \quad X_{n\wedge\tau_k} = X_0$
(2) $n < \tau_k \quad \Rightarrow \quad X_{n\wedge\tau_k} \leq k$
(3) $\tau_k \in (0, n] \quad \Rightarrow \quad X_{n\wedge\tau_k} = X_{\tau_k} = X_{\tau_{k-1}} + Y_{\tau_k} \leq k + (Y_\infty^*)^+ \in \mathbb{L}_1$

dostaneme, že

$$X_{n\wedge\tau_k} \leq k + (Y_\infty^*)^+ + X_0^+ \in \mathbb{L}_1.$$

Tedy $\sup_n EX_{n\wedge\tau_k}^+ < \infty$. Z věty o konvergenci submartingalu I pak plyne, že existuje $X^{(k)} \in \mathbb{L}_1$ taková, že

$$X_{n\wedge\tau_k} \xrightarrow{\text{sj}} X^{(k)}, \quad n \to \infty.$$

Pak ovšem pro

$$A_k = [\tau_k = \infty] = [X_\infty^* \leq k] \uparrow [X_\infty^* < \infty] = A$$

platí

$$X_n 1_{A_k} = X_{n\wedge\tau_k} 1_{A_k} \xrightarrow{\text{sj}} X^{(k)} 1_{A_k}, \quad \text{tj.} \quad X_n \xrightarrow{\text{sj}} X^{(k)} \quad \text{na } A_k.$$

Speciálně pak pro $m \geq k$ platí

$$X^{(m)} 1_{A_k} \overset{\text{sj}}{=} \lim_{n\to\infty} X_n 1_{A_m} \cdot 1_{A_k} \overset{\text{sj}}{=} \lim_{n\to\infty} X_n 1_{A_k} \overset{\text{sj}}{=} X^{(k)} 1_{A_k},$$

což lze stručněji a přehledněji parafrázovat svéráznějším zápisem

$$X^{(m)} \overset{\text{sj}}{=} \lim_{n\to\infty} X_n \overset{\text{sj}}{=} X^{(k)} \quad \text{na } A_k \subseteq A_m, \quad m \geq k.$$

Pak zřejmě existuje veličina $X^{(\infty)} \in \mathbb{L}$ taková, že (jde o stacionární konvergenci sj.)

$$X_\infty = X^{(\infty)} \overset{\text{sj}}{=} \lim_{m\to\infty} X^{(m)} \quad \text{na} \quad A,$$

přičemž $X_\infty \overset{\text{sj}}{=} X^{(k)} \overset{\text{sj}}{=} \lim_n X_n$ na $A_k$. Celkem tak dostáváme, že

$$X_\infty \overset{\text{sj}}{=} \lim_{n\to\infty} X_n \quad \text{na} \quad A = \cup_k A_k = [X_\infty^* < \infty].$$

***Q.E.D.***

Buď $K = (a, b)$ interval a $Z = \mathbb{Z} \cap K$ ekvidistantní množina a rostoucí posloupnost $t \in \mathbb{R}^{(Z)}$ s obrazem $T = \{t_k; k \in Z\}$. Nyní zavedeme nové indexové množiny

$$S = T \backslash \{\inf T\} = \{t_k, k \in N\} \quad \text{a} \quad N = Z \backslash \{\inf Z\}$$

ochuzené o případné minimální prvnky z množin $T$ či $Z$. Pro $k \in N$ pak zavedeme

$$V_k = Y_{t_k} = X_{t_k} - X_{t_{k-1}}.$$

Pak proces $(V_k)_N$ resp. $(Y_t)_S$ nazveme $\mathcal{F}_{t_k}$ resp. $\mathcal{F}_t$-***martingalové diference*** $\mathcal{F}_{t_k}$-martingalu $(X_{t_k})_Z$ resp. $\mathcal{F}_t$-martingalu $(X_t)_T$.

**Poznámka:** Pro jednoduchost zápisu budeme dále pracovat s kanonickou (přirozenou) indexací $t_k = k$ a s indexovými množinami $T = Z = \mathbb{N}_0$, a tedy také s $S = N = \mathbb{N}$.

**Věta (sčítatelnost martingalových diferencí)** Buďte $(Y_k)_{k=1}^\infty$ martingalové diference. Pak platí

(12)
$$\sum_{k=1}^\infty \text{var}(Y_k) < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^\infty Y_k \quad \text{je sčítatelná sj. i v } \mathbb{L}_2.$$

V řeči odpovídajícího martingalu $X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ startujícího z $X_0 = 0$ pak lze psát

$$\lim_{n\to\infty} \text{var}(X_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \text{var}(X_n) < \infty \quad \Rightarrow \quad X_n \quad \text{konverguje v sj. i v } \mathbb{L}_2.$$

**Důkaz:** Ukážeme, že veličiny $Y_k$ jsou nekorelované. Pro $n \geq k$ zřejmě platí

$$E[Y_n|\mathcal{F}_k] \overset{\text{sj}}{=} E[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_k] \overset{\text{sj}}{=} 0,$$

a tak snadno ověříme nekorelovanou diferencí $Y_k = X_k - X_{k-1}$

$$\text{cov}(Y_k, Y_n) = EY_kY_n = EY_kE(Y_n|\mathcal{F}_k) = 0.$$

Z nekorelovanosti diferencí $Y_n = X_n - X_{n-1}$ okamžitě dostaneme, že

$$E|X_n|^2 = \mathrm{var}(X_n) = \mathrm{var}\big(\sum_{k=1}^{n} Y_k\big) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{var}(Y_k).$$

Konvergenci v $\mathbb{L}_2$ v (12) okamžitě dostaneme z věty o sčítatelnosti centrovaných nekorelovaných veličin. Dále vidíme, že jsou splněny předpoklady věty o konvergenci submartingalů I

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E|X_n| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{E|X_n|^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{var}(Y_k)} < \infty,$$

z čehož usuzujeme, že v (12) nastává i konvergence skoro jistě. ***Q.E.D.***

**Věta (Silný zákon velkých čísel pro martingalové diference)** Buďte $(Y_k)_{k=1}^{\infty}$ martingalové diference a $0 < b_n \uparrow \infty$. Pak

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{-2}\mathrm{var}(Y_k) < \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \frac{X_n}{b_n} \xrightarrow{\text{sj}} 0,$$

tj. $X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \overset{\text{sj}}{=} o(b_n)$ pro $n \to \infty$.

**Důkaz:** Použijeme předchozí větu říkající, že $\sum_k Y_k$ je ščítatelná sj. i v $\mathbb{L}_2$ a Croneckerovo lemma říkající, že

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = o(b_n), \qquad \text{je-li} \quad 0 < b_n \uparrow \infty \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ sčítatelná.}$$

Nejprve ukážeme konvergenci v $\mathbb{L}_2$. Dle Croneckerova lemmatu platí

$$E|X_n|^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{var}(Y_k) = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \,\mathrm{var}\big(\tfrac{Y_k}{b_k}\big) = o(b_n^2), \quad n \to \infty.$$

a podobně dostaneme konvergenci skoro jistě

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \overset{\text{sj}}{=} o(b_n), \quad n \to \infty.$$

***Q.E.D.***

**Věta (CLV MC Leish)** Buď $(Y_k^{(n)})_{k=1}^{k_n}, n \in \mathbb{N}$ posloupnost martingalových diferencí a nechť platí

(1) $\| |Y^{(n)}|_\infty^* \|_{\mathbb{L}_2} \in l_\infty$ (stejná omezenost druhých momentů globálních absolutních maxim = SO)
(2) $|Y^{(n)}|_\infty^* \xrightarrow{P} 0$ pro $n \to \infty$ (stejnoměrná asymptotická zanedbatelnost = SAZ)
(3) $\sum_{k=1}^{k_n} Y_k^2 \xrightarrow{P} 1$ pro $n \to \infty$ (normalizační podmínka = N)

Pak $X^{(n)} = \sum_{k=1}^{k_n} Y_k^{(n)} \to N(0,1)$ v distribuči pro $n \to \infty$.

**Poznámky:** Důkaz věty lze nalézt ve Štěpánově knize, vydavatelství Academia. Globálním absolutním maximem rozumíme celkové globální supremum z absolutní hodnoty procesu, které značíme $|\cdot|_\infty^*$. Okamžitě je vidět, že první dva předpoklady věty (SO,SAZ) je splněna, pokud např. $|Y^{(n)}|_\infty^* \xrightarrow{\mathbb{L}_2} 0$ pro $n \to \infty$. Naopak třetí podmínku lze pomocí odpovídajícího martingalu $X_k^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} Y_k^{(n)}$ zapsat ve tvaru

$$\sum_{k=1}^{k_n} |X_k^{(n)} - X_{k-1}^{(n)}|^2 = \sum_{k=1}^{k_n} |Y_k^{(n)}|^2 \xrightarrow{P} 1, \quad n \to \infty,$$

přičemž výraz na levo lze interpretovat jako kvadratickou variaci posloupnosti $X_k^{(n)}, k \le k_n$ kdykoli $n \in \mathbb{N}$. Označme dále Feller-Lindebergovu (FL) a podmíněnou Feller-Lindebergovu podmínku (PFL)

$$\mathrm{FL}_\varepsilon^{(n)} = \sum_{k=1}^{k_n} E[|Y_k^{(n)}|^2; |Y_k^{(n)}| \ge \varepsilon] \to 0, \quad n \to \infty, \quad \varepsilon > 0 \tag{13}$$

$$\mathrm{PFL}_\varepsilon^{(n)} = \sum_{k=1}^{k_n} E[|Y_k^{(n)}|^2; |Y_k^{(n)}| \ge \varepsilon | \mathcal{F}_{k-1}^{(n)}] \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty, \quad \varepsilon > 0. \tag{14}$$

Protože $\mathrm{PFL}_\varepsilon^{(n)} \geq 0$ má střední hodnotu $\mathrm{FL}_\varepsilon^{(n)}$, platí

$$(\mathrm{FL}) \quad \equiv \quad \mathrm{FL}_{\varepsilon>0}^{(n)} \to 0, \quad \equiv \quad \mathrm{PFL}_{\varepsilon>0}^{(n)} \xrightarrow{\mathbb{L}_1} 0, \quad \Rightarrow \quad \mathrm{PFL}_{\varepsilon>0}^{(n)} \xrightarrow{P} 0 \quad \equiv \quad (\mathrm{PFL}).$$

Pro další účely zavedeme ***kvadratický kompenzátor*** $K_n$ centrovaného $\mathbb{L}_2$ $\mathcal{F}_n$-martingalu $(X_n)_{n=0}^\infty$ startujícího z $X_0 = 0$ ve tvaru

$$K_n = \sum_{k=1}^n \mathrm{var}(X_k|\mathcal{F}_{k-1}) = \sum_{k=1}^n E[Y_k^2|\mathcal{F}_{k-1}],$$

kde $Y_k = X_k - X_{k-1}$ jsou odpovídající diference. Kvadratický kompenzátor je mj. kompenzátorem kvadrátu $X_k^2$ od našeho centrovaného $\mathbb{L}_2$-martingalu $X_k$ vzhledem k předem pevně stanovené filtraci. Obecný kompenzátor $\mathbb{K}_n$ procesu $X_n^2$ je dle věty o výpočtu kompenzátoru tvaru

$$\mathbb{K}_n = \mathbb{K}_0 + \sum_{k=1}^n E[X_k^2 - X_{k-1}^2|\mathcal{F}_{k-1}] = \mathbb{K}_0 + K_n, \quad \text{kde} \quad \mathbb{K}_0 \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_0).$$

**Lemma** (i) $(\mathrm{FL}) \Rightarrow (\mathrm{PFL}), (\mathrm{PFL}) + K_{k_n}^{(n)} \in \mathrm{SI} \Rightarrow (\mathrm{FL})$.
(ii) $(\mathrm{FL}) \Rightarrow |Y^{(n)}|_\infty^* \xrightarrow{\mathbb{L}_2} 0 \Rightarrow (\mathrm{SO}) + (\mathrm{SAZ})$.

**Důkaz:** Již dříve jsme ukázali, že $(\mathrm{FL}) \Rightarrow (\mathrm{PFL})$ a poznamenali, že $|Y^{(n)}|_\infty^* \xrightarrow{\mathbb{L}_2} 0 \Rightarrow (\mathrm{SO}) + (\mathrm{SAZ})$. Pokud $K_{k_n}^{(n)} \in \mathrm{SI}$, pak také $\mathrm{PFL}_{\varepsilon>0}^{(n)} \in \mathrm{SI}$, neboť platí $0 \leq \mathrm{PFL}_{\varepsilon>0}^{(n)} \leq K_{k_n}^{(n)}$. Z dovozeného $\mathrm{PFL}_\varepsilon^{(n)} \in \mathrm{SI}$ a předpokladu $(\mathrm{PFL}) : \mathrm{PFL}_{\varepsilon>0}^{(n)} \xrightarrow{P} 0$ pak plyne konvergence $(\mathrm{FL}) : \mathrm{PFL}_{\varepsilon>0}^{(n)} \xrightarrow{\mathbb{L}_1} 0$.

Zbývá tak dovodit $(\mathrm{FL}) \Rightarrow |Y^{(n)}|_\infty^* \xrightarrow{\mathbb{L}_2} 0$. Nechť (FL). Označme čas

$$\tau_n = \inf\{k \in \{1, \ldots, k_n\}; |X_k^{(n)}| = |X^{(n)}|_\infty^*\},$$

kdy dochází k dosažení globálního absolutního maxima, což zřejmě obecně není markovský čas. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$E(|Y^{(n)}|_\infty^*)^2 = E|Y_{\tau_n}^{(n)}|^2 \leq \varepsilon^2 + E[|Y_{\tau_n}^{(n)}|^2; |Y_{\tau_n}^{(n)}| \geq \varepsilon] \leq \varepsilon^2 + \sum_{k=1}^{k_n} E[|Y_k^{(n)}|^2; |Y_{\tau_n}^{(n)}| \geq \varepsilon] = \varepsilon^2 + \mathrm{FL}_\varepsilon^{(n)}.$$

Pro každé $\varepsilon > 0$ tak platí $\limsup_n E(|Y^{(n)}|_\infty^*)^2 \leq \varepsilon^2$. ***Q.E.D.***

**Lemma** Je-li (FL) a $\mathrm{var}(X_{k_n}^{(n)}) = \sum_{k=1}^{k_n} E(Y_k^{(n)})^2, n \in \mathbb{N}$ omezená posloupnost, pak

$$K_{k_n}^{(n)} - \sum_{k=1}^{k_n} |Y_k^{(n)}|^2 \xrightarrow{\mathbb{L}_1} 0.$$[21]

**Důkaz:** Připomeňme, že

$$K_{k_n}^{(n)} = \sum_{k=1}^{k_n} E[|Y_k^{(n)}|^2|\mathcal{F}_{k-1}^{(n)}] \quad \text{a označme} \quad V_{k,\varepsilon}^{(n)} = |Y_k^{(n)}| \cdot 1_{[|Y_k^{(n)}|<\varepsilon]}$$

uříznutí $|Y_k^{(n)}|$ pod úrovní $\varepsilon > 0$. Odpovídající druhou mocninu pak $\mathcal{F}_{k-1}^{(n)}$-vycentrujeme

$$Z_{k,\varepsilon}^{(n)} = (V_{k,\varepsilon}^{(n)})^2 - E[(V_{k,\varepsilon}^{(n)})^2|\mathcal{F}_{k-1}^{(n)}],$$

čímž dostaneme $\mathcal{F}_k^{(n)}$-martingalové diference takové, že platí

$$E|Z_{k,\varepsilon}^{(n)} - (Y_{k,\varepsilon}^{(n)})^2| \leq 2E[(Y_{k,\varepsilon}^{(n)})^2; |Y_{k,\varepsilon}^{(n)}| \geq \varepsilon].$$

Nasčítáním pak dostaneme nerovnost

$$E|\sum_{k=1}^{k_n} (Y_k^{(n)})^2 - K_{k_n}^{(n)}| \leq 2\mathrm{FL}_\varepsilon^{(n)} + E|\sum_{k=1}^{k_n} Z_{k,\varepsilon}^{(n)}|,$$

přičemž

$$\left(E|\sum_{k=1}^{k_n} Z_{k,\varepsilon}^{(n)}|\right)^2 = ||\sum_{k=1}^{k_n} Z_{k,\varepsilon}^{(n)}||_{\mathbb{L}_1}^2 \leq ||\sum_{k=1}^{k_n} Z_{k,\varepsilon}^{(n)}||_{\mathbb{L}_2}^2 = \sum_{k=1}^{k_n} ||Z_{k,\varepsilon}^{(n)}||_{\mathbb{L}_2}^2 \leq \sum_{k=1}^{k_n} ||(V_{k,\varepsilon}^{(n)})^2||_{\mathbb{L}_2}^2 \leq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{k_n} ||V_{k,\varepsilon}^{(n)}||_{\mathbb{L}_2}^2,$$

[21]Tato konvergence říká něco o blízkosti kvadratické variace posloupnosti $X_k^{(n)}$ s kvadratickým kompenzátorem $K_k^{(n)}$.

neboť
$$||Z_{k,\varepsilon}^{(n)}||_{\mathbb{L}_2}^2 = \mathrm{var}\big((V_{k,\varepsilon}^{(n)})^2|\mathcal{F}_{k-1}^{(n)}\big) \le E\big[\big(V_{k,\varepsilon}^{(n)}\big)^4|\mathcal{F}_{k-1}^{(n)}\big] = ||(V_{k,\varepsilon}^{(n)})^2||_{\mathbb{L}_2}^2.$$
Celkem tak dostáváme, že
$$||\sum_{k=1}^{k_n}(Y_k^{(n)})^2 - K_{k_n}^{(n)}||_{\mathbb{L}_1} \le 2\mathrm{FL}_\varepsilon^{(n)} + \varepsilon\sqrt{\sum_{k=1}^{k_n} E[(Y_k^{(n)})^2; |Y_k^{(n)}| < \varepsilon]} \le 2\mathrm{FL}_\varepsilon^{(n)} + \varepsilon\sqrt{\sup_n \mathrm{var}(X_{k_n}^{(n)})}.$$
Protože $\mathrm{FL}_{\varepsilon>0}^{(n)} \to 0$ pro $n \to \infty$, dostáváme
$$\limsup_{n\to\infty} ||\sum_{k=1}^{k_n}(Y_k^{(n)})^2 - K_{k_n}^{(n)}||_{\mathbb{L}_1} \le \varepsilon\sqrt{\sup_n \mathrm{var}(X_{k_n}^{(n)})},$$
kdykoli $\varepsilon > 0$. Protože $\sup_n \mathrm{var}(X_{k_n}^{(n)}) < \infty$ dle předpokladu, jsme s důkazem hotovi. ***Q.E.D.***

**Poznámka:** Označíme-li
$$M_k = \sum_{j=1}^{k}(Y_j^{(n)})^2 - K_k = \sum_{j=1}^{k}(Y_j^{(n)})^2 - E[(Y_j^{(n)})^2|\mathcal{F}_{j-1}^{(n)}],$$
pak okamžitě vidíme, že je tento proces $(\mathcal{F}_k^{(n)})_{k=1}^{k_n}$-martingalem a z maximální nerovnosti tak dostaneme odhad pro stejnoměrnou konvergenci ve tvaru
$$P(|M|_{k_n}^* > \varepsilon) \le \tfrac{1}{\varepsilon}\, E|M_{k_n}| = \tfrac{1}{\varepsilon}\, ||\sum_{k=1}^{k_n}(Y_{k_n}^{(n)})^2 - K_{k_n}^{(n)}||_{\mathbb{L}_1} \to 0,$$
jsou-li splněny předpoklady předchozího lemmatu.

**Věta (CLV Brown)** Buď $(Y_k^{(n)})_{k=1}^{k_n}, n \in \mathbb{N}$ posloupnost martingalových diferencí a nechť platí (PFL) a $K_{k_n}^{(n)} \xrightarrow{P} 1$ pro $n \to \infty$, pak $X_{k_n}^{(n)} = \sum_{k=1}^{k_n} Y_k^{(n)} \to N(0,1)$ v distribuci pro $n \to \infty$.

**Důkaz:** V Lachoutových skriptech z Mc Leishovy věty.