Redukce proměnných při (elementárním) podmiňování jevem

Nechť $Z \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ a $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ buď σ-algebra. Připomeňme si definici podmíněné střední hodnoty. ***Podmíněnou střední hodnotou náhodné veličiny Z za podmínky $\mathcal{F}$*** rozumíme veličinu $Y \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F})$ takovou, že $\mathbb{E}[Z; F] = \mathbb{E}[Y; F]$ platí pro každou $F \in \mathcal{F}$.

Je-li $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (S, \mathcal{S})$ obecná náhodná veličina a $B \in \mathcal{S}$ s $\mathbb{P}_X(B) > 0$, pak z výše uvedené definice podmíněné střední hodnoty volbou $F := [X \in B] \in \mathcal{F} := \sigma(X)$ okamžitě dostaneme, že

$$\mathbb{E}[Z|X \in B] = \tfrac{\mathbb{E}[Z;X\in B]}{P(X\in B)} = \tfrac{\mathbb{E}[Y;X\in B]}{P(X\in B)} = \mathbb{E}[Y|X \in B], \tag{1}$$

kde $Y := \mathbb{E}[Z|X]$.

Příklad. Buďte X, Y nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou 1. Spočtěte

$$\mathbb{E}[(X + Y)^2|X > 1].$$

Řešení: Příklad můžeme spočítat přímo z definice podmíněné střední hodnoty. Výpočet můžeme také rozdělit do dvou kroků. V prvním kroku spočteme

$$\underline{\mathbb{E}[(X + Y)^2|X]} \overset{\text{sj}}{=} X^2 + 2X\mathbb{E}Y + \mathbb{E}Y^2 = \underline{X^2 + 2X + 2}$$

a následně dle vzorce (1) počítáme

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbb{E}[(X + Y)^2|X > 1]}} &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[(X + Y)^2|X]|X > 1\big] = \mathbb{E}\big[X^2 + 2X + 2|X > 1\big] \\ &= E[X^2|X > 1] + 2E[X|X > 1] + 2 = \underline{\underline{11}},\end{aligned}$$

kde $\mathbb{E}[X^2|X > 1] = 5$ a $\mathbb{E}[X|X > 1] = 2$ jsme získali např. výpočtem z definice elementární podmíněné střední hodnoty (nebo ze znalosti podmíněného rozdělení $\mathbb{P}_{X|X>1}$).

Poznámka. Na výše uvedený postup řešení příkladu lze také nahlížet jako na použití jedné ze základních vlastností podmíněné střední hodnoty $\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_1] \overset{\text{sj}}{=} \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_2]|\mathcal{F}_1]$, kde $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{A}$ jsou σ-algebry.