1. Opakování, značení - filtrace

Buď $(\Omega, \mathcal{A})$ měřitelný prostor. Označme $\mathbb{L}(\mathcal{A}) = \{X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})\}$ množinu všech reálných $\mathcal{A}$-měřitelných náhodných veličin, kde $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ značí borelovskou σ-algebru na reálné přímce $\mathbb{R}$. Je-li $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E})$, pak symbolem

$$\boldsymbol{\sigma(X)} = \boldsymbol{\sigma_{\mathcal{E}}(X)} = \{[X \in B]; B \in \mathcal{E}\}$$

označujeme ***σ-algebru generovanou náhodnou veličinou*** X. Dále zkráceně píšeme $\mathbb{L}(\sigma(X)) = \mathbb{L}(\boldsymbol{X})$. Je-li $Y \in \mathbb{L}(X)$, pak existuje $h \in \mathbb{L}(\mathcal{E})$ taková, že $Y = h(X)$ a zápis $Y \in \mathbb{L}(X)$ pak čteme: reálná náhodná veličina ***Y je měřitelnou funkcí*** náhodné veličiny $\boldsymbol{X}$. Je-li $\mathcal{A}$ σ-algebra, pak je generovaná ***kanonickou náhodnou veličinou σ-algebry*** $\mathcal{A}$ ve tvaru

$$\mathbf{1}_{\mathcal{A}} = (1_A, A \in \mathcal{A}) : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})^{\mathcal{A}}, [1]$$

která je reálným náhodným procesem indexovaným množinou $\mathcal{A}$ říkající, který z jevů $A \in \mathcal{A}$ nastal a který ne. Speciálně, je-li $Y \in \mathbb{L}(\mathcal{A}) = \mathbb{L}(1_A, A \in \mathcal{A})$, pak existuje $h \in \mathbb{L}(\mathcal{B}^{\mathcal{A}})$ taková, že $Y = h(1_A, A \in \mathcal{A})$. Je-li $(\Omega, \mathcal{A})$ měřitelný prostor a $X(\omega) = \omega, \omega \in \Omega$, pak $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelná náhodná veličina, které říkáme ***kanonické náhodná veličina*** na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$. Je-li navíc, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^T$, kde $\emptyset \neq T \subseteq \mathbb{R}$, pak X nazveme také ***kanonickým náhodným procesem***. Proces $X = (X_t, t \in T)$ je pak sestaven z projekcí $X_t(\omega) = \omega_t, t \in T$. Je-li $\omega \in \mathbb{R}^T$, pak $\omega|_t = (\omega_s, s \in T_t)$ značí ***zúžení funcke*** $\omega : T \to \mathbb{R}$ na indexovou množinu $\boldsymbol{T_t} = \{s \in T; s \leq t\}$ všech (časových) indexů do času t. Funci $\omega|_t$ budeme také říkat ***funkce*** ω ***useknutá v čase*** $t \in T$.

Buď $(\Omega, \mathcal{A})$ měřitelný prostor, neklesající systém $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ pod σ-algeber $\mathcal{A}$ nazveme ***filtrací*** indexovanou indexovou množinou $\emptyset \neq T \subseteq \mathbb{R}$, formálně:

- $s \leq t,\ s, t \in T \ \Rightarrow\ \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{A}$.

Přirozenou (kanonickou) filtrací náhodného procesu $X = (X_t, t \in T)$ s indexovou množinou $\emptyset \neq T \subseteq \mathbb{R}$ a stavovým prostorem $(E, \mathcal{E})$ rozumíme filtraci

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \in T_t) = \sigma(X|_t) = \sigma_{\mathcal{E}^{T_t}}(X|_t) = \{[X|_t \in B], B \in \mathcal{E}^{T_t}\}.$$

Je-li $X_t \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_t), t \in T$, pak říkáme, že proces X_t je ***$\mathcal{F}_t$-adaptovaný*** a píšeme zkráceně $\boldsymbol{X_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)}$. Zřejmě pro reálný proces X platí: $X_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t) \ \equiv\ \mathcal{F}_t^X \subseteq \mathcal{F}_t, t \in T$.
Pokud $Y_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$, pak pro každé $t \in T$ platí $Y_t \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_t^X) = \mathbb{L}(X|_t)$, existuje tedy $h_t \in \mathbb{L}(\mathcal{E}^{T_t})$ taková, že $Y_t = h_t(X|_t)$.

Poznámka: Je-li $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ systém σ-algeber, pak $\mathcal{F} = \cap_{t \in T} \mathcal{F}_t$ je opět σ-algebra největší taková, že $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_t, t \in T$, formálně $\mathcal{F} = \inf\{\mathcal{F}_t; t \in T\}$ vzhledem ke svazovému uspořádání $\subseteq$ σ-algeber. Naopak $\mathcal{A} = \cup_{t \in T} \mathcal{F}_t$ je algebra, ale ne obecně σ-algebra. Symbolem

$$\mathcal{F} = \bigvee_{\boldsymbol{t \in T}} \boldsymbol{\mathcal{F}_t} = \sigma(\bigcup_{t \in T} \mathcal{F}_t) = \sigma(\mathcal{A})$$

označíme nejmenší σ-algebru obsahující $\mathcal{F}_t, t \in T$ jako podmnožiny. Z hlediska svazového uspořádání můžeme psát $\mathcal{F} = \vee_{t \in T} \mathcal{F}_t = \sup\{\mathcal{F}_t; t \in T\}$, tedy je to nejmenší horní mez.

(1) Je-li $\mathcal{C} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_t, t \in T$, pak zřejmě také $\mathcal{C} \perp\!\!\!\perp \mathcal{A}$ a protože $\mathcal{A}$ je algebra (a tedy uzavřená na konečné průniky), platí $\mathcal{C} \perp\!\!\!\perp \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$.

(2) Podobně: jsou-li P, Q dvě pravděpodobnosti rovnající se na $\mathcal{F}_t, t \in T$, pak $P = Q$ na $\mathcal{A}$, a opět protože $\mathcal{A}$ je algebra (uzavřená na konečné průniky), platí $P = Q$ na $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$.

Buď $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ filtrace na $(\Omega, \mathcal{A})$, označíme

$$\boldsymbol{\mathcal{F}_{-\infty}} = \bigcap_{s \in T} \mathcal{F}_s, \quad \boldsymbol{\mathcal{F}_{\infty}} = \sigma(\bigcup_{s \in T} \mathcal{F}_s) = \bigvee_{s \in T} \mathcal{F}_s.$$

Dále $T_{t-} = \{s \in T : s < t\}$. Řekneme, že (reálný) stochastický proces $X = (X_t, t \in T)$ je ***(zleva, zprava) spojitý***, pokud jeho ***trajektorie*** $X(\omega) : t \in T \mapsto X_t(\omega)$ je (zleva, zprava) spojitá funkce.

---

[1]Zde a dále vypouštíme symbol $\otimes$, který používáme pro součin σ-algeber, měr a měřitelných a pravděpodobnostních prostorů běžně také používaný při označení příslušných mocninných σ-algeber a měřitelných prostorů. Zkráceně tedy budeme dále např. psát

$$\boldsymbol{(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})^2} = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})^{\otimes 2} = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \otimes (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \boldsymbol{(\Omega^2, \mathcal{A}^2, \mathbb{P}^2)} = (\Omega^2, \mathcal{A}^{\otimes 2}, \mathbb{P}^{\otimes 2}) = (\Omega \times \Omega, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}).$$

Cvičení Buďte $X_k, k \in \mathbb{N}$ nezávislé kladné veličiny s hustotou $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot 1_{[x>0]}$. Položme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_K, \qquad \text{and} \qquad N_t = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{[S_k \le t]}. \tag{1}$$

Ukažte, že $N = (N_t, t \geq 0)$ je zprava spojitý proces startující z $N_0 = 0$ s neklesajícími trajektoriemi nabývající hodnot z $\mathbb{N}_0$ s nezávislými přírůstky $N_t - N_s \sim \mathtt{Po}(\lambda|t-s|)$. Proces $N = (N_t, t \geq 0)$ nazveme ***Poissonovým processem s intenzitou $\lambda > 0$***.

2. Definice - martingaly [(spravdelivě) oceňující, ohodnocující proces]

Buď $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ filtrace na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Řekneme, že integrovatelný proces $X_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$ je ***$\mathcal{F}_t$-martingal***, pokud $X_s \overset{\text{sj}}{=} E[X_t|\mathcal{F}_s]$, ***$\mathcal{F}_t$-submartingal***, pokud $X_s \overset{\text{sj}}{\leq} E[X_t|\mathcal{F}_s]$ a ***$\mathcal{F}_t$-supermatingal***, pokud $X_s \overset{\text{sj}}{\geq} E[X_t|\mathcal{F}_s]$ - kdykoli $s \leq t$ pro $s, t \in T$.

Interpretace Pro $\mathcal{F}_t$-martingal a $s \leq t$ z T požadujeme $X_s \overset{\text{sj}}{=} E[X_t|\mathcal{F}_s]$, což interpretujeme tak, že X_s je (spravedlivým) věrným $\mathcal{F}_s$-odhadem veličiny X_t. Hodnota procesu X_s tak poskytuje stochasticky vyvážený $\mathcal{F}_s$-měřitelný odhad budoucích hodnot procesu X. Proces X_t jako $\mathcal{F}_t$-martingal se pak používá k modelování (spravedlivého) věrného ocenění (ohodnocení) očekávaných finačních toků. Tato interpretace plně podpovídá případu, kdy existuje veličina $X_\infty \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_\infty)$ taková, že $X_t \overset{\text{sj}}{=} E[X_\infty|\mathcal{F}_t], t \in T$. V této souvislosti je také užitečná představa procesu X jako (věrně, nestranně) střílejícího procesu a veličiny X_∞ jako odpovídajícího cíle. Obecně si lze martingal představovat jako stochasticky vyvážený hledající proces. Ve výše uvedeném případě pak lze říci, že cíl $X_\infty \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_\infty)$ je nalezen. Pokud taková veličina neexistuje, pak lze opět interpretovat martingal jako hledající proces, přičemž odpovídající cíl neexistuje. To souvisí s explozivním charakterem martingalu v takovém případě vycházející z postupného rozčilení, že to, co hledá neexistuje. Následkem takového rozčilení martingalu může být to, že v limitě (po explozi) ztratí svou úroveň $EX_s = EX_t$, kterou si ze své podstaty v konečných deterministických časech zachovává.

Po $\mathcal{F}_t$-submartingalu pro $s \leq t$ z T požadujeme $X_s \overset{\text{sj}}{\leq} E[X_t|\mathcal{F}_s]$, což znamená, že veličina X_s je dolním $\mathcal{F}_s$-měřitelným odhadem budoucích hodnot procesu X_t. Bereme-li proces X jako odhad budoucích hodnot, pak tento proces budoucí hodnoty (sub=pod) podhodnocuje (podceňuje) popř. podstřeluje. Opět jako speciální případ můžeme uvažovat situaci, kdy existuje veličina $X_\infty \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_\infty)$ taková, že $X_t \overset{\text{sj}}{\leq} E[X_\infty|\mathcal{F}_t], t \in T$. V takovém případě proces X_t svůj cíl opět zasáhne. V tomto případě si můžeme představovat, že je to proces, který svůj cíl nadhání spíše zespoda a očekává, že jej nalezne spíše nahoře. V případě, že uvedená cílová veličina neexistuje, interpretujeme to tak, že cíl, který proces hledal, neexistuje, což se opět může projevit poklesem úrovně procesu $X_t, t \in T$ po explozi (v nekonečnu), přestože je jeho úroveň $EX_t, t \in T$ neklesá.

Analogicky po $\mathcal{F}_t$-supermartingalu pro $s \leq t$ z T požadujeme $X_s \overset{\text{sj}}{\geq} E[X_t|\mathcal{F}_s]$, což znamená, že veličina X_s je horním $\mathcal{F}_s$-měřitelným odhadem budoucích hodnot procesu X_t. Bereme-li opět proces X jako odhad budoucích hodnot, pak tento proces budoucí hodnoty naopak (super=nad) nadhodnocuje (přeceňuje) popř. přestřeluje. Zde ponechvám čtenáři k analogickému doplnění případy, kdy existuje cíl, který proces z principu přestřeluje a kdy hledaný cíl neexistuje, a proto proces po explozi svou nerostoucí úroveň může $EX_t, t \in T$ povznést. Za poznámku už jen stojí poznamenat, že slovo ,,super" zde neznamená: že proces nejspíše půjde nahoru, ale naopak. Super zde znamená (bezmezný) optimismus, který je budoucím vývojem krocen, což se projevuje v možném poklesu jeho úrovně. Naopak submartingal jako podhodnocující proces se vymezuje opatrností proti pádu a tím získává potenciál k růstu, což se projevuje v jeho neklesající úrovni. O martingalu pak lze říci, že je to proces, který kráčí (zlatým) středem.

Lemma 1 Nechť $\emptyset \neq T \subseteq \mathbb{R}$ je lokálně konečná množina[2] a $X_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$ je integrovatelný proces indexovaný T. Pak X_t je $\mathcal{F}_t$-martingal (super/sub) právě tehdy, když

$$\forall\, s, t \in T \quad s < t \quad (s,t) \cap T = \emptyset \quad \Rightarrow \quad X_s \overset{\text{sj}}{=} E[X_t|\mathcal{F}_s] \qquad (\overset{\text{sj}}{\geq}, \overset{\text{sj}}{\leq}). \tag{2}$$

Pokud $(s,t) \cap T = \emptyset$, říkáme, že body $s, t \in T$ jsou ***sousedé***.

Důkaz: Je-li proces X_t $\mathcal{F}_t$-martingal (super/sub), pak (2) platí z definice $(\overset{\text{sj}}{\geq}, \overset{\text{sj}}{\leq})$. Platí-li naopak (2), pak platí $V(0)$, kde

$$V(n): \quad \forall s, t \in T \quad s < t \quad \operatorname{card}(s,t) \cap T = n \quad \Rightarrow \quad X_s \overset{\text{sj}}{=} E[X_t|\mathcal{F}_s] \qquad (\overset{\text{sj}}{\geq}, \overset{\text{sj}}{\leq}).$$

[2] Tj. $(a,b) \cap T$ je konečná množina pro každé $a < b$.

Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$. Indukcí ukážeme, že platí $V(n)$ za přepodkladu, že platí $V(k)$ pro $k < n$. Nechť $\mathrm{card}(s,t) \cap T = n \in \mathbb{N}$. Existuje tedy $r \in (s,t) \cap T$, pak $n_1 = \mathrm{card}(s,r) \cap T < n$ a $n_2 = \mathrm{card}(r,t) \cap T < n$. Z indukčního předpokladu platnosti $V(n_1), V(n_2)$ pak dostáváme (ne)rovnost

$$X_s \overset{\text{sj}}{=} E[X_r|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{=} E[E(X_t|\mathcal{F}_r)|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{=} E[X_t|\mathcal{F}_s] \qquad (\overset{\text{sj}}{\geq}, \overset{\text{sj}}{\leq}).$$

Q.E.D.

Poznámka: Martingal má konstantní střední hodnotu, submartingal neklesající a supermartingal nerostoucí.

Lemma 2 Nechť X_t je $\mathcal{F}_t$-super/sub-martingal. Je-li EX_t konstantní, pak X_t je $\mathcal{F}_t$-martingal.

Důkaz: Pro submartingal. Buďte $s,t \in T$ a $s < t$, pak $Y = E[X_t|\mathcal{F}_s] - X_s \overset{\text{sj}}{\geq} 0$ a $EY = EX_t - EX_s = 0$. Pak nutně $Y \overset{\text{sj}}{=} 0$, tj. $X_s \overset{\text{sj}}{=} E[X_t|\mathcal{F}_s]$.

Q.E.D.

Lemma 3 Nechť proces $X = (X_t, t \in T)$ je $\mathcal{F}_t$-martingal (super, sub). Je-li filtrace $(\mathcal{G}_t, t \in T)$ sevřená mezi $\mathcal{F}_t^X \subseteq \mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t$, pak proces X je také $\mathcal{G}_t$-martingal (super, sub).

Důkaz: Z předpokladů plyne, že $X_t \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_t^X) \subseteq \mathbb{L}_1(\mathcal{G}_t), t \in T$. Jinak buďte $s,t \in T$ takové, že $s < t$. Pak protože $\mathcal{G}_s \subseteq \mathcal{F}_s$ a $X_s \in \mathbb{L}_1(\mathcal{G}_s)$, platí

$$E[X_t|\mathcal{G}_s] \overset{\text{sj}}{=} E[E(X_t|\mathcal{F}_s)|\mathcal{G}_s] \overset{\text{sj}}{=} E[X_s|\mathcal{G}_s] \overset{\text{sj}}{=} X_s \qquad (\overset{\text{sj}}{\leq}, \overset{\text{sj}}{\geq}).$$

Q.E.D.

Řekneme, že proces $X = (X_t, t \in T)$ je ***martingal (supermartingal, submartingal)***, je-li $\mathcal{F}_t^X$-martingal (super/sub). Ekvivalentně je proces martingal (super/sub), je-li vzhledem k nějaké filtraci, přičemž vždy lze uvažovat kanonickou.

Buďte $X_k, k \in \mathbb{N}$ nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny. O procesu $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ pak řekneme, že je to ***náhodná procházka s krokem*** $X_n = S_n - S_{n-1}$. Buď navíc $(\mathcal{F}_k, k \in \mathbb{N}_0)$ filtrace. Pak řekneme, že proces S_n je ***$\mathcal{F}_n$-náhodná procházka***, pokud $S_n \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_n)$ a pokud její krok $X_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ je nezávislý s $\mathcal{F}_n$ pro $n \in \mathbb{N}_0$.

Příklady Buď S_n $\mathcal{F}_n$-náhodná procházka s krokem $X_n = S_n - S_{n-1}$.

(1) Je-li $X_1 \in \mathbb{L}_1$, pak $\boldsymbol{\mathbb{S}_n = S_n - ES_n = S_n - n \cdot EX_1}$ je $\mathcal{F}_n$-martingal.
(2) Je-li $X_1 \in \mathbb{L}_2$, pak $\boldsymbol{V_n = \mathbb{S}_n^2 - E\mathbb{S}_n^2 = \mathbb{S}_n^2 - n\sigma^2}$ je $\mathcal{F}_n$-martingal, kde $\sigma^2 = \mathrm{var}(X_1)$.
(3) Je-li $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\beta = \ln E \exp\{\alpha X_1\} \in \mathbb{R}$, pak $\boldsymbol{\mathcal{E}_n = \exp\{\alpha S_n - n\beta\}}$ je $\mathcal{F}_n$-martingal.

(1*) Buď N_t Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$. Pak proces $M_t = N_t - EN_t = N_t - \lambda t$ je martingal.
(2*) Proces $V_t = M_t^2 - EM_t^2 = M_t - \lambda t$ je $\mathcal{F}_t^N$-martingal, kde $\mathcal{F}_t^N = \mathcal{F}_t^M \supseteq \mathcal{F}_t^V$.[3]
(3*) $\mathcal{E}_t = \exp\{\alpha N_t - \beta t\}$ je martingal právě tehdy, když $E\mathcal{E}_t = 1, t \geq 0$.

Proces $W = (W_t, t \geq 0)$ se nazývá ***Wienerův***, pokud
(a) $W_0 = 0$ a jeho trajektorie $W(\omega) = (W_t(\omega), t \geq 0)$ jsou spojité
(b) $W|_t \perp\!\!\!\perp W_t - W_s \sim N(0, t-s)$ pro $0 \leq s \leq t$.
Ekvivalentně je proces W Wienerův, pokud splňuje (a) a pokud (b') je centrovaný Gausovský proces s autokovariancí $\mathrm{cov}(W_s, W_t) = s \wedge t$ pro $s,t \geq 0$.
(1') Wienerův proces W_t je martingal.
(2') $V_t = W_t^2 - t$ je $\mathcal{F}_t^W$-martingal.
(3') $\mathcal{E}_t = \exp\{\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\}$ je martingal.
V bodech (3),(3*),(3') lze také uvažovat $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$ komplexní.

Příklad Nechť $Y \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ a $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ je filtrace na $(\Omega, \mathcal{A})$. Pak proces $Y_t = E[Y|\mathcal{F}_t], t \in T$ je $\mathcal{F}_t$-martingal.

Tvrzení 1 Nechť $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ a $(\mathcal{G}_t, t \in T)$ jsou nezávislé filtrace, tj. $\mathcal{F}_\infty$ a $\mathcal{G}_\infty$ jsou nezávislé σ-algebry. Je-li X_t $\mathcal{F}_t$-martingal (super/sub), pak je také $\mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_t$-martingal (super/sub).

---

[3] Zde platí $\mathcal{F}_t^M = \mathcal{F}_t^{|M|} = \mathcal{F}_t^{M^2} = \mathcal{F}_t^V$,

Důkaz: Buďte $(s,t) \in T^{(2)}, F \in \mathcal{F}_s, G \in \mathcal{G}_s$. Pak z nezávislosti $G \in \mathcal{G}_\infty \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_\infty \supseteq \sigma(1_F, E[X_t|\mathcal{F}_s], X_t)$ dostaneme, že[4]

$$\begin{aligned}\int_{F\cap G} E[X_t|\mathcal{F}_s]\,\mathrm{d}P &= E[1_G \cdot 1_F E[X_t|\mathcal{F}_s]] = P(G)\cdot \int_F E[X|\mathcal{F}]\,\mathrm{d}P = P(G)\int_F X_t\,\mathrm{d}P \\ &= P(G)\cdot E[X_t 1_F] = E[1_G \cdot X_t 1_F] = \int_{F\cap G} X_t\,\mathrm{d}P.\end{aligned}$$

Ověřili jsme tedy stabilitu

$$\int_H X_t\,\mathrm{d}P = \int_H E[X_t|\mathcal{F}_t]\,\mathrm{d}P \tag{3}$$

pro množiny $H \in \mathcal{H} = \{F \cap G : F \in \mathcal{F}_s, G \in \mathcal{G}_s\} \ni \Omega$ tvořící systém uzavřený na konečné průniky. Protože množina všech $H \in \mathcal{F}_s \vee \mathcal{G}_s$ vyhovující (3) tvoří Dynkinův systém, platí rovnost (3) pro každé $H \in \sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{F}_s \vee \mathcal{G}_s$. Protože $E[X_t|\mathcal{F}_s] \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_s) \subseteq \mathbb{L}(\mathcal{F}_s \vee \mathcal{G}_s)$, platí

$$E[X_t|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{=} E[X_t|\mathcal{F}_s \vee \mathcal{G}_s] \overset{\text{sj}}{=} X_s.$$

Q.E.D.

Tvrzení 2 Nechť $X_t, t \in T$ je $\mathcal{F}_t$-martingal nábývajících skoro jistě hodnot v množině $D \subseteq \mathbb{R}$. Je-li $g : D \to \mathbb{R}$ konvexní funkce taková, že $g(X_t) \in \mathbb{L}_1$, tj. je-li $g(X_t)$ integrovatelný proces, pak $g(X_t)$ je $\mathcal{F}_t$-submartingal.

Důkaz: Použitím Jensenovy nerovnosti pro podmíněnou střední hodnotu dostaneme, že

$$E[g(X_t)|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{\geq} g(E[X_t|\mathcal{F}_s]) \overset{\text{sj}}{=} g(X_s), \quad (s,t) \in T^{(2)}.$$

Q.E.D.

Poznámka: Jensenova nerovnost pro podmíněnou střední hodnotu platí pro konvexní funkci na konvexní podmnožině v $\mathbb{R}^k$. Stačí uvažovat podmíněnou střední hodnotu jako střední hodnotu vůči podmíněnému rozdělení na $\mathbb{R}^k$, které vždy exisuje, neboť $\mathbb{R}^k$ je separabilní metrický prostor.

Tvrzení 3 Nechť $X_t, t \in T$ je $\mathcal{F}_t$-submartingal s hodnotami skoro jistě v konvexní množině $D \subseteq \mathbb{R}$ a $g : D \to \mathbb{R}$ neklesající konvexní. Je-li proces $g(X_t)$ integrovatelný, pak je to $\mathcal{F}_t$-submartingal.

Důkaz: Použitím Jensenovy nerovnosti pro podmíněnou střední hodnotu dostaneme, že

$$E[g(X_t)|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{\geq} g(E[X_t|\mathcal{F}_s]) \overset{\text{sj}}{\geq} g(X_s), \quad (s,t) \in T^{(2)}.$$

Q.E.D.

---

[4]Od nyní budeme používat následující značení $T^{(k)} = \{t \in T^k; t_1 < \cdots < t_k\}$ pro množinu všech rostoucích posloupností délky $k \in \mathbb{N}$ nabývajících hodnot v množine T. Pro snadnější přietí tohoto značení zde uvedeme i odpovídající odůvodnění. Symbolem $A^B = \{f : B \to A\}$ v teorii množin označujeme množinu všech zobrazení z B do A. Výhodou tohoto značení je umožňění formálního přípstupu k výpočtu její kardinality $|A^B| = |A|^{|B|}$. Dále připomenenme, že v teorii množin definujeme $0 = \emptyset = \{\}$ což je prototyp 0-prvkové množiny (a také jediná taková množina), dále $1 = \{0\} = \{\emptyset\} = \{\{\}\}$, což je prototyp 1-prvkové množiny a nakonec $2 = \{0,1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\{\}, \{\{\}\}\}$ jako prototyp dvouprvkové množiny. Pak tedy $A^2 = A^{\{0,1\}}$ je množina všech zobrazení z dvouprvkové množiny $2 = \{0,1\}$ do A a tuto množinu ztotožňujeme s kartézským součinem $A \times A = A^2 = \{(a,b); A, b \in A\}$, což vnímáme jako množinu všech uspořádaných dvojic $(a,b) = \{a, \{a,b\}\}$ množiny A. Podobně A^k ztotožňujeme s k-násobným kartézským součinem $A \times \ldots \times A$, pro $k \in \mathbb{N}$. Dále připomeneme, že množinou všech k-prvkových podmnožin množiny A značíme $\binom{A}{k}$. Pomocí kombinací lze ověřit, že počet prvků odpovídá čistě formálními zápisu

$$|\tbinom{A}{k}| = \tbinom{|A|}{k}.$$

Podobně jako kombinace můžeme modelovat pomocí k-prvkových podmnožin, můžeme variace množiny A modelovat pomocí prostých posloupností. Symbolem $A^{[B]} = \{f \in A^B : f \text{ je prostá }\}$ pak definujeme množinu všech prostých zobrazení z množiny B do množiny A. Je-li $|B| = k \in \mathbb{N}$, pak $|A^B| = |A|^{[|B|]}$, kde využíváme označení $x^{[k]}$ pro k-tou (sestupnou) faktoriální mocninu

$$x^{[k]} = \prod_{j=0}^{k-1}(x-j) = x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-k+1).$$

Zajímáme-li se o uspořádané prosté posloupnosti ve smyslu rostoucí či klesající, pak se nabízí nabízené značení

$$A^{(B)} = \{f : B \to A; f \text{ rostoucí }\},$$

které má zejména tu výhodu, že počet prvků opět můžeme spočíst čistě formálně

$$|A^{(k)}| = |\tbinom{A}{k}| = \tbinom{|A|}{k} = \tfrac{|A|^{[k]}}{k!},$$

kdy se množina A jakoby vyhoupne do závorek () nad číslo k.

3. Kompenzátory

Buď $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ filtrace. Pro $t \in T$ označme $\boldsymbol{T_{t-}} = \{s \in T; s < t\}$ a dále

$$\boldsymbol{\mathcal{F}_{t\uparrow}} = \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{-\infty}, \qquad \text{pokud } t = \min T$$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}_{t\uparrow}} = \bigvee_{s \in T_{t-}} \mathcal{F}_s = \sigma(\mathcal{F}_s; s \in T_{t-}), \qquad \text{pokud } t > \inf T.$$

Pak $(\mathcal{F}_{t\uparrow}, t \in T)$ je filtrace a my jí budeme říkat ***prediktabilní filtrace*** k filtraci $\mathcal{F}_t$ (či prediktabilní filtrace filtrace $\mathcal{F}_t$). Proces $H_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_{t\uparrow})$ adaptovaný na prediktabilní filtraci budeme nazývat $\mathcal{F}_t$-predikovatelný (prediktabilní) proces.

Příklady: a) $T = \mathbb{N}_0$, pak $\mathcal{F}_{0\uparrow} = \mathcal{F}_0$ a pro $n \in \mathbb{N}$ platí $\mathcal{F}_{n\uparrow} = \mathcal{F}_{n-1}$. Proces H je pak $\mathcal{F}_n$-predikovatelný právě tehdy, když je předvídatelný o krok dopředu, tj. $H_0 \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_0), H_n \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_{n-1}), n \in \mathbb{N}$.

Predikabilní proces si můžeme představit jako proces, kterým modelujeme naši investiční strategii. Pomocí adaptovaných procesů které nemusí být predikovatelné naopak modelujeme vnější vlivy, které nás bezprostředně ovlivňují. Buď $F_n \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_n)$ cena futures kontraktu v čase $n \in \mathbb{N}_0$, tj. proces $F_n \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_n)$ je $\mathcal{F}_n$-pozorovatelný a $H_n \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_{n-1})$ pro $n \in \mathbb{N}$ bude představovat množství uzavřených futures kontraktů pro časový interval $(n-1, n)$. Na tomto intervalu se cena futures změní o hodnotu $\Delta F_n = F_n - F_{n-1}$ a my si pak na svůj účet můžeme připsat hodnotu

$$H_n(F_n - F_{n-1}) = H_n \cdot \Delta F_n,$$

což se dá interpretovat tak, že jsme na hru o výplatě $\Delta F_n = F_n - F_{n-1}$ sadilli sázku o velikosti H_n, kterou jsme ovšem museli stanovit před započetím hry již v čase $n-1$ pro $n \in \mathbb{N}$.[5] Celková naše výhra v čase $m \in \mathbb{N}$ pak bude činit

$$V_m = \sum_{n=1}^{m} H_n \cdot \Delta F_n = \sum_{n=1}^{m} H_n(F_n - F_{n-1}),$$

což je diskrétní analogie stochastického integrálu zaváděného v přednášce stochstická analýza. Na závěr jen opět připomeňme, že inegrované procesy $H_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_{t\uparrow})$ představují (intervenční) investiční (predikovatelné) strategie a procesy $F_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$, podle kterých se integruje, naopak představyjí často cenu akcie (zboží), měnový kurs či cenu futures a ty reprezentují (více či méně nepředvídatelné) vnější vlivy.

b) Je-li $X = (X_t, t \geq 0)$ zleva spojitý proces, je také $\mathcal{F}_t^X$-predikovatelný. Zřejmě $X_0 \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_0^X) = \mathbb{L}(\mathcal{F}_{0\uparrow}^X)$,

$$X_t = \lim_{\mathbb{Q} \ni s \to t-} X_s \in \mathbb{L}(X_s, s < t) = \mathbb{L}(\mathcal{F}_{t\uparrow}^X), \quad t > 0.$$

Zleva spojité procesy jsou tedy vhodnými kandidáty proto, aby se daly stochasticky integrovat.

c) Je-li $N_t = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{[S_k \leq t]}$ Poissonův proces, pak N_t není $\mathcal{F}_t$-predikovatelný proces. Ukážeme, že existuje $t > 0$ takové, že

$$N_t \notin \mathbb{L}(N_s, s < t) = \mathbb{L}(\mathcal{F}_{t\uparrow}^N).$$

Buď $\omega^1 \in \Omega$ libovolné a položme $t = S_1(\omega) > 0$. Pak $P(N_t = 0) > 0$, a tedy existuje $\omega^2 \in [N_t = 0]$. Pak $N_s(\omega^1) = 0 = N_2(\omega^2)$ platí pro $s < t$, ale $N_t(\omega^1) = 1 \neq 0 = N_1(\omega^2)$. Tedy $N_t \notin \mathbb{L}(N_s, s < t)$ a dokonce N_t není žádnou (ani neměřitelnou) funkcí $(N_s, s < t)$.

Poissonův proces se používá k modelování vnějších značně nepředvídatelných událostí jako jsou pojistné události $S_n, n \in \mathbb{N}$ či doby poruchy přístroje způsobené obtížně předvídatelnou poruchou jednoduché součástky jako je např. žárovka s exponenciální dobou dožití. Tento proces se zjevně nedá použít pro modelování naší strategie. Dovedeno do absurdna bychom pak pojistnou smlouvu uzavřeli až v čase, kdy pojistná událost nastane s ohledem na velikost pojistné škody, což popírá základní principy pojistění.

Buď $X_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$. Řekneme, že proces $\mathcal{F}_t$-predikovatelný proces $K_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_{t\uparrow})$ je ***$\mathcal{F}_t$-kompenzátor***em procesu X, pokud proces $M_t = X_t - K_t$ je $\mathcal{F}_t$-martingal.

Poznámka: Buď $W = (W_t, t \geq 0)$ Wienerův proces. To je zřejmě martingal a také zleva spojitý proces, tedy predikovatelný vzhledem ke kanonické filtraci. Pak jeho kompenzátorem je opět jakýkoli $\mathcal{F}_t^W$-martingal a pojem kompenzátoru vzhledem k takovéto filtraci nemá valný význam. Naopak, je-li $T = \mathbb{N}_0$, pak takový netriviální příklad predikovatelného martingalu neexistuje a to stojí v pozadí následujícího tvrzení, které ukazuje, jak takový kompenzátor vypadá.

[5] Hodnota H_0 je v tomto případě naprosto nepodstatná.

Tvrzení 4 Buď $X = (X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ $\mathcal{F}_n$-adaptovaný integrovatelný proces. Pak $\mathcal{F}_n$-predikovatelný proces K_n je $\mathcal{F}_n$-kompenzátorem procesu X právě tehdy, když

$$(4) \qquad K_n \overset{\text{sj}}{=} K_0 + \sum_{k=1}^{n} E[X_k - X_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}], \qquad \text{kde} \qquad K_0 \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_0).$$

Důkaz: Nechť K_n je $\mathcal{F}_n$-kompenzátor procesu X_n. Pak $M_n = X_n - K_n$ je $\mathcal{F}_n$-martingal. Platí tedy

$$0 \overset{\text{sj}}{=} E[M_n - M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \overset{\text{sj}}{=} E[X_n - X_{n-1} - (K_n - K_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}] \overset{\text{sj}}{=} E[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] - (K_n - K_{n-1}),$$

neboť $K_n, K_{n-1} \in \mathcal{F}_{n\uparrow} = \mathcal{F}_{n-1}$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dále $X_0 - M_0 \overset{\text{sj}}{=} K_0 \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_0)$ musí být integrovatelná veličina, neboť $X_0, M_0 \in \mathbb{L}_1$. Nasčítáním pak dostaneme

$$K_n = K_0 + \sum_{k=1}^{n}(K_k - K_{k-1}) \overset{\text{sj}}{=} K_0 + \sum_{k=1}^{n} E[X_k - X_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}].$$

Naopak proces K_n definovaný rovností (4 - všude) je $\mathcal{F}_n$-predikovatelný, což lze ověřit indukcí s pomocí

$$\Delta K_k = K_k - K_{k-1} = E[X_k - X_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}] \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Pak $M_n = X_n - K_n \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$ a

$$E[M_n - M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \overset{\text{sj}}{=} E[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] - \Delta K_n \overset{\text{sj}}{=} 0.$$

Tedy proces $M_n = X_n - K_n$ je $\mathcal{F}_n$-martingal. ***Q.E.D.***

Příklady a) Nechť S_n je integrovatelná náhodná procházka s krokem $X_n = \Delta S_n = S_n - S_{n-1} \in \mathbb{L}_1$. Pak její kompenzátor pro $T = \mathbb{N}_0$ je tvaru $K_0 + nEX_1$, kde $K_0 \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_0^S) = \mathbb{L}(\{\emptyset, \Omega\}) \equiv \mathbb{R}$.
b) Je-li $\mathbb{S}_n = S_n - ES_n$ centrovaná náhodná procházka s krokem $\mathbb{X}_n = \Delta\mathbb{S}_n = \mathbb{S}_n - \mathbb{S}_{n-1} \in \mathbb{L}_2$, pak $\mathbb{S}_n^2$ je $\mathcal{F}_n$-submartingal s $\mathcal{F}_n^{\mathbb{S}}$-kompenzátorem ve tvaru $K_0 + n\sigma^2$, kde $K_0 \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 = \operatorname{var}(\mathbb{X}_1) = E\mathbb{X}_1^2$.
c) Je-li N_t Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$, pak má např. kompenzátor $K_t = K_0 + \lambda t$, kde $K_0 \in \mathbb{R}$.

Poznámka: Integrovatelný $\mathcal{F}_n$-adaptovaný proces $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ je $\mathcal{F}_n$-martingal (super/sub) právě tehdy, když jeho $\mathcal{F}_n$-kompenzátor je skoro jistě konstatní (nerostoucí, neklesající), tj.

$$0 \overset{\text{sj}}{=} E[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \overset{\text{sj}}{=} \Delta K_n \quad (\overset{\text{sj}}{\geq}, \overset{\text{sj}}{\leq}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. Markovský čas (průběžně pozorovatelná událost)

Nechť $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ je filtrace. Řekneme, že $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$ je ***$\mathcal{F}_t$-markovský čas***, ozn. $\boldsymbol{\tau \in M\check{C}(\mathcal{F}_t)}$, pokud $[\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t$ platí pro každé $t \in T$. Ekvivalentně $\tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t) \equiv 1_{[\tau \leq t]} \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$, což znamená, že čas τ je markovský právě tehdy, když jeho (jednobodový) čítací proces $1_{[\tau \leq t]}$ je průběžně pozorovatelný na základě filtrace $\mathcal{F}_t$.

Lemma 5 (i) Je-li $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$ $\mathcal{F}_t$-markovský čas, pak $[\tau = t] \in \mathcal{F}_t, t \in T$.
(ii) Je-li $\tau : \Omega \to S \cup \{\infty\}$, kde $S \subseteq T$ je spočetná, pak $\tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t) \equiv [\tau = s] \in \mathcal{F}_s, s \in S$.

Důkaz: (i) Zřejmě $[\tau < t] = \cup_{s \in S_t}[\tau \leq s] \in \mathcal{F}_t$, kde $S_t \subseteq T_t$ je spočetná hustá zprava. Potom také

$$[\tau = t] = [\tau \leq t] \backslash [\tau < t] \in \mathcal{F}_t, \quad t \in T.$$

(ii) Ukážeme pouze zpětnou implikaci, přímá plyne z bodu (i). Buď $t \in T$, pak

$$[\tau \leq t] = \cup_{s \in S_t}[\tau = s] \in \mathcal{F}_t, \quad \text{neboť} \quad [\tau = s] \in \mathcal{F}_s \quad \text{pro} \quad s \in S_t = \{s \in S; s \leq t\}.$$

Q.E.D.

Příklad Buď $X > 0$ kladná reálná náhodná veličina a $N_t = 1_{[X \leq t]}$ její čítací a $I_t = 1_{[X=t]}$ její indikátorový proces. Pak „obecně" $X \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t^N) \backslash \text{MČ}(\mathcal{F}_t^I)$, neboť

$$\mathcal{F}_t^I = \sigma([X = s], s \leq t) = \{[X \in S], [X \notin S]; S \subseteq [0, t] \text{ spočetná } \}$$

obecně neobsahuje množinu typu $[X \leq t]$.

Tvrzení 6 Nechť $X = (X_t, t \in T)$ je $\mathcal{F}_t$-adaptovaný integrovatelný proces. Pak X_t je $\mathcal{F}_t$-martingal právě tehdy, když

$$\forall\ \text{MČ}(\mathcal{F}_t) \ni \tau : \Omega \to \{s,r\} \subseteq T \quad EX_s = EX_r = EX_\tau, \tag{5}$$

což se dá interpretovat, že $\mathcal{F}_t$-martingal je proces, který kromě toho, že si zachovává svou úroveň EX_t v deterministických časech $t \in T$ si také zachovává svou úroveň v $\mathcal{F}_t$-markovských časech τ nabývajících dvou hodnot z T.

Důkaz: Platí-li (5), $(s,r) \in T^{(2)}$ a $A \in \mathcal{F}_s$, pak $\tau = s \cdot 1_A + r \cdot 1_{\Omega \setminus A} : \Omega \to \{s,r\} \subseteq T$ je $\mathcal{F}_t$-markovský čas, neboť $[\tau = s] = A, [\tau = r] = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}_s$ a dle předpokladu tak platí

$$0 = EX_r - EX_\tau = E(X_r - X_\tau) = E[(X_r - X_s)1_A].$$

Je-li naopak proces X_t $\mathcal{F}_t$-martingal a $\text{MČ}(\mathcal{F}_t) \ni \tau : \Omega \to \{s,r\} \subseteq T$, pak pro $s \le t$ máme $A = [\tau = s] \in \mathcal{F}_s$, a tedy

$$0 = E[(X_r - X_s)1_A] = E[(X_r - X_\tau)1_A] = E(X_r - X_\tau) = EX_r - EX_\tau.$$

Tedy proces X si zachovává úroveň v čase τ.

Příklady (i) Nechť S_n je $\mathcal{F}_n$-adaptovaný proces a $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, pak

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0, S_n \notin B\} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_n), \qquad \text{neboť} \qquad [\tau \le n] = \cup_{k \le n}[S_k \notin B] \in \mathcal{F}_n.$$

(ii) Buď $N_t = \sum_{k=1}^\infty 1_{[S_k \le t]}$ Poissonův proces. Pak S_k jsou $\mathcal{F}_t^N$-markovské časy, neboť

$$[S_k \le t] = [N_t \ge k] \in \mathcal{F}_t^N, \quad t \ge 0.$$

Tvrzení 8 Nechť $T \subseteq \mathbb{R}$ je uzavřená množina a $\tau_n \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t), n \in \mathbb{N}$. Pak $\tau = \sup\{\tau_n; n \in \mathbb{N}\} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$

Důkaz: Protože je T uzavřená množina, platí $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$. Dále $[\tau \le t] = \cap_{n \in \mathbb{N}} [\tau_n \le t] \in \mathcal{F}_t, t \in T$.

Poznámka Je-li $S \subseteq \mathbb{R}$ lokálně konečná množina a $x \in \mathbb{R}$, pak symbolem

$$\lfloor x \rfloor_S = \sup\{s \in S; s \le x\} \in S \cup \{-\infty\}$$

značíme ***zaokruhlení x dolů vzhledem k S*** a symbolem

$$\lceil x \rceil_S = \inf\{s \in S; s \ge x\} \in S \cup \{\infty\}$$

zaokruhlení nahoru vzhledem k S. Je-li $\tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t, t \in T)$ a $S \subseteq T$ lokálně konečná, pak

$$\lceil \tau \rceil_S \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t, t \in T) \cap \text{MČ}(\mathcal{F}_s, s \in S),$$

neboť $[\lceil \tau \rceil_S \le t] = [\lceil \tau \rceil_S \le \lfloor t \rfloor_S] = [\tau \le \lfloor t \rfloor_S] \in \mathcal{F}_{\rfloor t \rfloor_S} \subseteq \mathcal{F}_t, t \in T$.

Buď $(X_t, t \in T)$ reálný náhodný proces, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ a $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$. Pak předpisem

$$\rho_{B,\tau} = \inf\{t \in T; t \ge \tau, X_t \notin B\}$$

definujeme ***čas (okamžik) prvního výstupu procesu X z množiny B po čase τ***.

Tvrzení 9 Nechť $X_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t, t \in T), \tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$ a $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Je-li $S \subseteq T$ lokálně konečná, pak

$$\rho = \inf\{s \in S, s \ge \tau, X_s \notin B\} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t, t \in T).$$

Důkaz: Buď $t \in T$, pak

$$[\rho \le t] = \bigcup_{s \in S_t} [\tau \le s] \cap [X_s \notin B] \in \mathcal{F}_t,$$

kde $S_t = \{s \in S; s \le t\} \subseteq S$ je spočetná.

Tvrzení 10 Buď $T \subseteq \mathbb{R}$ uzavřený (nedegenerovaný) interval, $X_t \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t, t \in T), \tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$. Je-li X_t spojitý, $G \subseteq \mathbb{R}$ otevřená, pak $\rho_{G,\tau} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$.

Důkaz: Protože je množina G otevřená, platí

$$\rho_{B,\tau} = \min\{t \in T; t \ge \tau, X_t \notin B\},$$

přičemž $\min \emptyset = \inf \emptyset = \infty$. Je-li totiž $t_n \in T \downarrow t$ posloupnost taková, že $X_{t_n} \in F = \mathbb{R} \backslash G$, pak $t \in T$, neboť T je podle předpokladu uzavřená množina a také

$$X_t = \lim_{n \to \infty} X_{t_n} \in F = \mathbb{R} \backslash G,$$

neboť proces X je spojitý (zprava) a F je uzavřená množina. Nyní se pousíme čas $\rho_{G,\tau}$ výstupu z otevřené množiny předvídat výstupem z vepsaných uzavřených množin

$$F^\varepsilon = \{x \in G; \operatorname{dist}(x, F) \geq \varepsilon\}.$$

Protože $\operatorname{dist}(x, F)$ je infimem 1-lipschitzovských funkcí a je také 1-lipschitzovská, a tedy spojitá. Pak odpovídající vzor F^ε uzavřené množiny $[\varepsilon, \infty)$ je uzavřená množina. Buď nyní $t \in T$ pevné. Pak s využitím toho, že v definici $\rho_{G,\tau}$ se infima nabývá, můžeme psát

$$[\rho_{G,\tau} \leq t] = [\rho_{G,\tau} < t] \cup [X_t \notin G].$$

Buď $S \subseteq T$ hustá spočetná podmnožina. Zřejmě

$$A = \bigcup_{s \in S} \bigcup_{\mathbb{Q} \ni \varepsilon > 0} [X_s \notin F^\varepsilon] \in \mathcal{F}_t$$

přičemž platí[6] $[\rho_{G,\tau} < t] \subseteq A \subseteq [\rho_{G,\tau} \leq t]$. Pak tedy

$$[\rho_{G,\tau} \leq t] = [\rho_{G,\tau} < t] \cup [X_t \notin G] = A \cup [X_t \notin G] \in \mathcal{F}_t.$$

Q.E.D.

Poznámka: Je-li $\tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$ a $r \in T$, pak $\tau \wedge r \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$, neboť $[\tau \wedge r \leq t] = [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t$ pro $t < r \in T$ a $[\tau \wedge r \leq t] = \Omega \in \mathcal{F}_t$ pro $t \geq r \in T$.

Věta (Optional Stopping Theorem)

Buď $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ $\mathcal{F}_n$-martingal (super, sub) a $\tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_n)$. Pak $X_{\tau \wedge n}$ je $\mathcal{F}_n$-martingal (super, sub).

Důkaz: Protože $\text{MČ}(\mathcal{F}_k) \ni \tau \wedge n \leq n$, pro $k \leq n$ platí $[\tau \wedge n = k] \in \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_n$ a

$$X_{\tau \wedge n} = \sum_{k=0}^{m} X_k \cdot 1_{[\tau \wedge n = k]} \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_n),$$

Zřejmě $X_{\tau \wedge n} - X_{\tau \wedge (n-1)} = (X_n - X_{n-1}) \cdot 1_{[\tau > n-1]}$, kde $[\tau > n-1] \in \mathcal{F}_{n-1}$. Platí tedy

$$E[X_{\tau \wedge n} - X_{\tau \wedge (n-1)} | \mathcal{F}_{n-1}] = 1_{[\tau > n-1]} \cdot E[X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] \overset{\text{sj}}{=} 0 \quad (\overset{\text{sj}}{\leq}, \overset{\text{sj}}{\geq}).$$

Q.E.D.

Dále budeme využívat symbol $\boldsymbol{E[X; A]} = E[X \cdot 1_A]$, který bude značit ***střední hodnotu reálné náhodné velčiny $\boldsymbol{X}$ na množině $\boldsymbol{A}$***. Je-li $X = (X_t, t \in T)$ (zobecněný) reálný náhodný proces, pak symbolem

$$\boldsymbol{X_t^*} = \sup_{s \in T_t} X_s = \sup X|_t, \quad t \in T \cup \{\infty\}$$

značíme ***průběžné (historické) maximum procesu $\boldsymbol{X}$ do času $\boldsymbol{t}$***. Dále pak symbolem

$$\boldsymbol{|X|_t^*} = |X_t|^* = \sup_{s \in T_t} |X_s|, \quad t \in T \cup \{\infty\}$$

značíme průběžné (historické) maximum absolutní hodnoty tohoto procesu.

Věta (Submartingalová maximální nerovnost) Nechť $(X_k)_{k=0}^n$ je submartingal, pak pro $\varepsilon > 0$ platí

$$P(X_n^* \geq \varepsilon) \leq \tfrac{1}{\varepsilon} E[X_n; X_n^* \geq \varepsilon] \leq \tfrac{1}{\varepsilon} E X_n^+.$$

Důkaz: Protože $\tau = \inf\{k = 0, \ldots, n : X_k \geq \varepsilon\} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_k^X)$, platí $[\tau = k] \in \mathcal{F}_k$ pro $k \leq n$. Dále

$$[X_n^* \geq \varepsilon] = [X_\tau \geq \varepsilon] = [\tau \leq n].$$

---

[6] Jde lze vložit odůvodnění

Z předpokladu, že X_n je $\mathcal{F}_n$-submartingal a z definice podmíněné střední hodnoty, pak dostáme, že

$$EX_n^+ \geq E[X_n^+; \tau \leq n] \geq E[X_n; \tau \leq n] = \sum_{k=0}^{n} E[X_n; \tau = k] = \sum_{k=0}^{n} E[X_k; \tau = k]$$
$$= E[X_\tau; X_\tau \geq \varepsilon] \geq \varepsilon \cdot P(X_\tau \geq \varepsilon) = \varepsilon \cdot P(X_n^* \geq \varepsilon).$$

Q.E.D.

Věta (momentová maximální nerovnost pro martingal) Buď $(X_k)_{k=0}^n$ martingal a $r > 1$, pak

$$E(|X|_n^*)^r \leq (\tfrac{r}{r-1})^r \, E|X_n|^r.$$

Důkaz: Zřejmě můžeme předpokládat, že $0 \overset{\text{sj}}{\not\equiv} X_n \in \mathbb{L}_r$ v opačném případě je levá strana vzhledem k předpokladu $X_k \overset{\text{sj}}{=} E[X_n|\mathcal{F}_k^X]$ nulová nebo pravá ∞. Pak z nerovnosti[7] $E|X_k|^r \leq E|X_n|^r$ dostaneme

$$0 < E|X_n|^r \leq E(|X|_n^*)^r \leq \sum_{k=0}^{n} E|X_k|^r \leq (n+1) \cdot E|X_n| < \infty.$$

Ze vzorce pro výpočet střední hondoty z doplňkové distribuční funkce pro nezáporné veličiny

$$E|Y|^r = \int_0^\infty P(|Y|^r \geq x) \, \mathrm{d}x = r \int_0^\infty P(|Y| \geq y) \cdot y^{r-1} \, \mathrm{d}y$$

a s využitím maximální nerovnosti pro submartingal $|X_n|$ a Fubiniho věty dostaneme

$$E(|X|_n^*)^r = r \int_0^\infty P(|X|_n^* \geq x) \cdot x^{r-1} \, \mathrm{d}x \leq r \int_0^\infty E[|X_n|; |X|_n^* \geq x] \cdot x^{r-2} \, \mathrm{d}x = \tfrac{r}{r-1} \, E[|X_n| \cdot (|X|_n^*)^{r-1}].$$

Dále použijeme Hölderovu nerovnost s koeficienty $p = r$ a $q = (1 - \frac{1}{r})^{-1} = \frac{r}{r-1}$, přičemž dostaneme

$$E[|X_n| \cdot (|X|_n^*)^{r-1}] \leq (E|X_n|^r)^{\frac{1}{r}} \cdot [(E|X|_n^*)^r]^{\frac{r}{r-1}}.$$

Poskládáním obou nerovností a pokrácením dostaneme nerovnost pro normu v $\mathbb{L}_r$ ve tvaru

$$[E(|X|_n^*)^r]^{1/r} \leq \tfrac{r}{r-1} \, [E(|X_n|)^r]^{1/r},$$

což je ekvivalentní zápis požadované nerovnosti. ***Q.E.D.***

5. Zprava spojité martingaly $\mathbb{L}_2$-martingaly.

Věta (momentová maximální nerovnosti pro zprava spojité martingaly) Buď $(X_t)_{[0,n]}$ zprava spojitý $\mathcal{F}_t$-martingal, kde $n \in \mathbb{N}$. Pak pro každé $r > 1$ platí

$$E(|X|_n^*)^r \leq (\tfrac{r}{r-1})^r \, E|X_n|^r. \tag{6}$$

Důkaz: Buď $T_m = \{k \cdot 2^{-m}, k \in S_m\}$, kde $S_m = \{0, \ldots, n \cdot 2^m\}$. Pak $(X_{k2^{-m}})_{k=0}^{n2^m}$ je $\mathcal{F}_{k2^{-m}}$-martingal a dle momentové maximální nerovnosti pro diskrétní martingaly platí

$$E \sup_{t \in T_n} |X_t|^r = E \sup_{k \in S_n} |X_{k2^{-m}}|^r \leq (\tfrac{r}{r-1})^r \, E|X_n|^r.$$

Nerovnost (6) pak plyne limtním přechodem s pomocí Léviho věty o monotonní konvergenci. ***Q.E.D.***

Poznámka: Je-li $(X_t, t \geq 0)$ $\mathcal{F}_t$-martingal $\mathbb{L}_2$-integrovatelný (jinak $\mathbb{L}_2$-martingal vzhledem k $\mathcal{F}_t$), pak z momentové maximální nerovnosti pro diskrétní martingaly dostaneme odhad

$$E(|X|_t^*)^2 \leq 4E|X_t|^2 < \infty.$$

Speciálně je tedy proces $|X|_t^* \in \mathbb{L}_2$-integrovatelná majoranta pro proces $X|_t$. Této majoranty budeme v této části využívat v limitních přechodech při aproximaci markovských časů zprava pomocí odpovídajících zaokrohlení ze shora. Pro jistotu připomeňme, že zaokrouhlení markovského času ze shora vhledem k lokálně konečné množině je opět markovský čas vzhledem k filtraci indexované touto lokálně konečnou podmnožinou.

Formálně pro $\tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ a $T \subseteq [0, \infty)$ lokálně konečnou platí

$$\lceil \tau \rceil_T \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t, t \geq 0) \cap \text{MČ}(\mathcal{F}_t)_T.$$

Je-li $T_n \subseteq [0, \infty)$ rostoucí posloupnost lokálně konečných podmnožin postupně zahušťující $[0, \infty)$, pak

$$\text{MČ}(\mathcal{F}_t)_T \supseteq \text{MČ}(\mathcal{F}_t)_{T_n} \ni \tau_n = \lceil \tau \rceil_{T_n} \downarrow \tau \quad \text{a platí} \quad X_{\tau_n} \to X_\tau, \tag{7}$$

[7] Jde o Jensenovu nerovnost pro podmíněnou střední hodnotu, která říká, že $|X|_k^r \overset{\text{sj}}{\leq} E[|X_n|^r|\mathcal{F}_k^X]$, kde $X_k \overset{\text{sj}}{=} E[X_n|\mathcal{F}_k^X]$. Tady využíváme toho, že funkce $x \mapsto |x|^r$ je konvexní pro $r \geq 1$.

kde $T = \cup_n T_n$, pokud proces $(X_t, t \geq 0)$ je zprava spojitý.

Tvrzení [8] Nechť $(X_t, t \geq 0)$ je zprava spojitý $\mathcal{F}_t$-martingal a $\tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$. Buďte T_n rostoucí posloupnost lokálně konečných podmnožin $[0, \infty)$ tuto množinu postupně zahušťujících, pak pro $\tau_n = \lceil \tau \rceil_{T_n}$ platí

$$X_{t\wedge\tau_n} \xrightarrow{\mathbb{L}_1} X_{t\wedge\tau}, \quad t \geq 0.$$

Poznámka Pokud je proces X_t navíc $\mathbb{L}_2$-integrovatelný, pak okamžitě máme dokonce silnější tvrzení

$$X_{t\wedge\tau_n} \xrightarrow{\mathbb{L}_2} X_{t\wedge\tau}, \quad t \geq 0,$$

neboť máme k dispozici $\mathbb{L}_2$-integrovatelnou majorantu $X|_t^* \in \mathbb{L}_2$ pro posloupnost $X_{t\wedge\tau_n}, n \in \mathbb{N}$.

Důkaz: Protože, jak víme, platí $\tau_n \downarrow \tau$, platí také $t \wedge \tau_n \downarrow t \wedge \tau$ pro $n \to \infty$. Z předpokladu spojitosti zprava tak dostáváme $X_{t\wedge\tau_n} \to X_{t\wedge\tau}$. Zbývá tedy ukázat stejnoměrnou integrovatelnost posloupnosti $X_{t\wedge\tau_n}$. Protože $(X_s)_{T_n \cup \{t\}}$ je $\mathcal{F}_s$-martingal, a tedy $|X_s|$ je $\mathcal{F}_s$-submartingal, platí pro $k \geq 0$, že

$$\begin{aligned} E[|X_{t\wedge\tau_n}|; |X_{t\wedge\tau_n}| \geq k] &= \sum_{s \in T_n \cup \{t\}} E[|X_s|; |X_s| \geq k, t \wedge \tau_n = s] \\ &\leq \sum_{s \in T_n \cup \{t\}} E[|X_t|; |X_s| \geq k, t \wedge \tau_n = s] = E[|X_t|; |X_{t\wedge\tau_n}| \geq k], \end{aligned}$$

neboť $[|X_s| \geq k, t \wedge \tau_n = s] \in \mathcal{F}_s$. Speciálně pro $k = 0$ dostanem, že $E|X_{t\wedge\tau_n}| \leq E|X_t|$. Dále

$$P(|X_{t\wedge\tau_n}| \geq k) \leq \tfrac{1}{k} E|X_{t\wedge\tau_n}| \leq \tfrac{1}{k} E|X_t| = \delta_k \to 0, \quad k \to \infty.$$

Platí tedy $\sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_{t\wedge\tau_n}|; |X_{t\wedge\tau_n}| \geq k] \leq \sup\{E[|X_t|; A]; A \in \mathcal{F}_t, P(A) < \delta_k\} \to 0$ pro $k \to \infty$. ***Q.E.D.***

Poznámka: Pro potřeby důkazu věty optional stopping theorem pro zprava spojité procesy připomeneme odpovídající diskrétní verzi ovšem v trochu pozměněném tvaru, který je snadným důsledkem původní věty. Buď $T \subseteq [0, \infty)$ lokálně konečná množina a $(X_t)_T$ $\mathcal{F}_t$-martingal a $\tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$. Pak $X_{t\wedge\tau}$ je $\mathcal{F}_t$-martingal.

Věta (Optional Stopping Theorem) Buď $(X_t, t \geq 0)$ zprava spojitý $\mathcal{F}_t$-martingal a $\tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$. Pak $X_{\tau\wedge t}$ je opět zprava spojitý $\mathcal{F}_t$-martingal.

Důkaz: Buďte $0 \leq u < v < \infty$ pevné a $\{u, v\} \subseteq T_n \subseteq [0, \infty)$ rostoucí posloupnost lokálně konečných podmnožin postupně zahušťujících $[0, \infty)$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\tau_n = \lceil \tau \rceil_{T_n} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)_{T_n}.$$

Protože $(X_t)_{T_n}$ je diskrétní $\mathcal{F}_t$-martingal, máme dle v poznámce zmíněné prafrázované diskrétní verze Optional Stopping Theorem, že $(X_{t\wedge\tau_n})_{T_n}$ je $\mathcal{F}_t$-martingal, kdykoli $n \in \mathbb{N}$. Protože $(u, v) \in T_n^{(2)}$, platí

$$E[X_{v\wedge\tau_n} | \mathcal{F}_u] \overset{\text{sj}}{=} X_{u\wedge\tau_n}.$$

Protože[9] $X_{t\wedge\tau_n} \xrightarrow{\mathbb{L}_1} X_{t\wedge\tau}$ pro $t \in \{u, v\}$, dostaneme limitním přechodem pro $n \to \infty$ rovnost

$$E[X_{v\wedge\tau} | \mathcal{F}_u] \overset{\text{sj}}{=} X_{u\wedge\tau}.$$

Q.E.D.

O zprava spojitém $\mathcal{F}_t$-adaptovaném procesu $(X_t, t \geq 0)$ řekeneme, že je to ***lokání $\mathcal{F}_t$-martingal***, pokud existuje posloupnost „varovných" časů $\text{MČ}(\mathcal{F}_t) \ni \tau_n \uparrow \infty$ takových, že zastavený přírůstkový proces $X_{t\wedge\tau_n} - X_0$ je $\mathcal{F}_t$-martingal.

Poznámka: Je-li X_t zprava spojitý $\mathcal{F}_t$-martingal, pak je také lokálním $\mathcal{F}_t$-martingalem. Stačí volit posloupnost varovných časů $\tau_n = \infty$.

Poznámka: Buď $(X_t, t \geq 0)$ spojitý $\mathcal{F}_t$-martingal. Podle tvrzení 10 je

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 : |X_t - X_0| \geq n\} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t).$$

Zřejmě $Y_t = X_t - X_0$ je také spojitý $\mathcal{F}_t$-martingal, přičemž zastavený proces $Y_{t\wedge\tau_n}$ je omezený v absolutní hodnotě hodnotou $n \in \mathbb{N}$. Podle bodu (ii) předcházející poznámky tak je takto zastavený proces $\mathcal{F}_t$-martingal. Každý spojitý $\mathcal{F}_t$-martingal se tedy dá takto zastavit do omezeného $\mathcal{F}_t$-martingalu.

[8] Tvrzení i s důkazem lze vynechat, pokud nám stačí Optional Stopping Theorem pouze pro zprava spojité $\mathbb{L}_2$-martingaly.

[9] V $\mathbb{L}_2$-případě bychom využili integrovatelné majoranty $|X|_v^* \in \mathbb{L}_2$ a konvergence $X_{t\wedge\tau_n} \xrightarrow{\mathbb{L}_2} X_{t\wedge\tau}, n \to \infty$.

Tvrzení Nezáporný lokální $\mathcal{F}_t$-martingal X_t startující z $X_0 \in \mathbb{L}_1$ je $\mathcal{F}_t$-supermartingal.

Důkaz: Buď $\tau_n \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$ posloupnost varovných časů takových, že $X_{t\wedge\tau_n} - X_0$ je $\mathcal{F}_t$-martingal. Pak také $X_{t\wedge\tau_n}$ je $\mathcal{F}_t$-martingal a platí

$$X_t = \lim_{n\to\infty} X_{t\wedge\tau_n}$$

Z Fautova lemmatu pro podmíněnou a nepodmíněnou střední hodnotu a $s \in [0,t]$ tak dostaneme

$$EX_t \leq \liminf_{n\to\infty} EX_{t\wedge\tau_n} = EX_0 < \infty, \qquad \text{tj.} \quad X_t \in \mathbb{L}_1$$
$$E[X_t|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{\leq} \liminf_{n\to\infty} E[X_{t\wedge\tau_n}|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{=} \lim_{n\to\infty} X_{s\wedge\tau_n} = X_s,$$

neboť $X_{t\wedge\tau_n}$ je $\mathcal{F}_n$-martingal. ***Q.E.D.***

Podmíněné Fatouovo lemma Buďte $0 \leq X_n \in \mathbb{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P), n \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ σ-algebra. Pak

$$X = \liminf_{n\to\infty} X_n \in \mathbb{L}_1 \quad \Rightarrow \quad 0 \overset{\text{sj}}{\leq} E[X|\mathcal{F}] \overset{\text{sj}}{\leq} \liminf_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{F}_n].$$

Důkaz: Použijeme Léviho větu o monotónní konvergenci pro podmíněnou střední hodnotu. Zřejmě platí $0 \leq \inf_{k\geq n} X_k \uparrow X \in \mathbb{L}_1$. Pak tedy

$$0 \overset{\text{sj}}{\leq} E[X|\mathcal{F}] \overset{\text{sj}}{=} \lim_{n\to\infty} E[\inf_{k\geq n} |\mathcal{F}] \overset{\text{sj}}{\leq} \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} E[X_k|\mathcal{F}] \overset{\text{sj}}{=} \liminf_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{F}].$$

Q.E.D.

Poznámka: (i) Poznamenejme, že každý supermartingal, který si zachovává svou střední hodnotu (úroveň) je martingalem. Pokud si tedy nezáporný lokální martingal zachovává svou střední hodnotu (která může u supermatingalu maximálně klesat), je to martingal.
(ii) Je-li X_t zdola omezený lokální martingal, je zcela podobně supermartingalem a naprosto analogicky shora omezený lokální martingal je submartingalem. Dohromady tak dostáváme, že omezený lokální martingal je martingalem.

6. Wienerův proces a princip invariance

Buďte $X_n \sim R\{-1,1\}, n \in \mathbb{N}_0$ nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na dvouprvkové množině $\{-1,1\}$. Označme odpovídající náhodnou procházku

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

kterou budeme nazývat ***symetrickou náhodnou procházkou***.

Cvičení (i) Na základě principu zrcadlení pro symetrickou náhodnou procházku ukažte, že platí

- $P(S_n^* \geq k) = 2P(S_n \geq k)$ kdykoli $n + k$ je liché číslo pro $k, n \in \mathbb{N}$.

(ii) Na základě CLV (a stejnoměrné konvergence distribučních funkcí) ukažte, že

- $P(S_n \geq k) \to \frac{1}{2}$ pro $n \to \infty$.

(iii) Ukažte, že $\tau_k = \inf\{n \in \mathbb{N}_0, S_n = k\} \in \text{MČ}(\mathcal{F}_n^X)$ splňuje $\tau_k \overset{\text{sj}}{<} \infty$.
(iv) Ukažte, že $S_n^* \sim |S_n|$.

Poznámka: Buď $(\mathbb{X}, \rho)$ separabilní metrický prostor s borelovskou σ-algebrou $\mathcal{B}(\mathbb{X})$. Nechť $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost náhodných veličin s hodnotami v $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$ ne nutně definovaných na stejném pravděpodobnostním prostoru. Pokud $X_n \to X_0$ v distribuci, pak existuje náhodná posloupnost $(X_n', n \in \mathbb{N}_0)$ taková, že $X_n' \sim X_n$ a že

$$X_n' \xrightarrow{\text{sj}} X_0', \quad n \to \infty.$$

Princip invariance Zájemnce o důkaz nechť navštěvuje přednášku Principy invariance.
Ve světle předchozí poznámky lze princip invariance přepsat v následujícím tvaru. Existuje spojitý proces $W = (W_t, t \geq 0)$ a posloupnosti symetrických náhodných procházek $S^{(m)}$ takových, že

$$P\left(m^{-1/2} S^{(m)}_{\lfloor mt \rfloor} \to W_t \quad \text{lokálně stejnoměrně na } [0,\infty)\right) = 1.$$

Speciálně tedy pro každé $t \geq 0$ platí

$$\sup_{s \in [0,t]} |m^{-1/2} S^{(m)}_{\lfloor ms \rfloor} - W_s| \xrightarrow{\text{sj}} 0, \quad m \to \infty.$$

Z trojúhelníkové nerovnosti pak ihned dostaneme

$$m^{-1/2} \sup_{s \in [0,t]} S^{(m)}_{\lfloor ms \rfloor} \xrightarrow{\text{sj}} W^*_t, \quad m \to \infty$$

Speciálně pro $t = 1$ pak platí

$$m^{-1/2} \sup_{j \leq m} S^{(m)}_j \xrightarrow{\text{sj}} W^*_1, \quad m \to \infty$$

Dle principu zrcadlení pro symetrickou náhodnou procházku pak platí

$$W^*_1 \overset{\text{sj}}{=} \lim_{m \to \infty} m^{-1/2} \sup_{j \leq m} S^{(m)}_j \sim \lim_{m \to \infty} m^{-1/2} |S^{(m)}_m| \overset{\text{sj}}{=} |W_1|.$$

Tedy $W^*_1 \sim |W_1|$.

Cvičení (i) Ukažte, že výše uvedený proces W splňuje axiomy kladené na Wienerův proces.
(ii) Ukažte, že $(\frac{1}{a} W(a^2 t), t \geq 0)$ je opět Wienerův proces pro $a \neq 0$.
(iii) Ukažte, že $W^*_t \sim |W_t|$ platí pro každé $t \geq 0$.
(iv) Ukažte, že $\tau_h = \inf\{t \geq 0, W_t = h\} \in \text{MČ}(\mathcal{F}^W_t)$ splňuje $\tau_h \overset{\text{sj}}{<} \infty$ a spočtěte hustotu času $\tau_h, h \neq 0$.
(v) Ukažte, že $Y_t = W_{t \wedge \tau_h}$ je martingal, ale že

- $Z_t = \left(Y_{\frac{t}{1-t}} \cdot 1_{[t<1]} + h \cdot 1_{[t \geq 1]}\right) \cdot 1_{[\tau_h < \infty]}$ je lokální martingal, který není martingalem pro $h \neq 0$.

Buď $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (S, \mathcal{S})$ náhodná veličina. O veličině $Y \in \mathbb{L}(X)^n$ řekneme, že je ***postačující statistikou*** náhodné veličiny X vzhledem k systému rozdělení $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(\Omega, \mathcal{A})$, pokud $P_{X|Y}$ existuje a nezávisí na výběru $P \in \mathcal{P}$. Symbolem $\boldsymbol{\mathcal{P}(\Omega, \mathcal{A})}$ zde rozumíme množinu všech pravděpodobnostních měr na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$.

Lemma Buď $Y \in \mathbb{L}^n(X)$ postačující statistika náhodné veličiny $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (S, \mathcal{S})$ vzhledem k systému $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(\Omega, \mathcal{A})$. Pak pro $P, Q \in \mathcal{P}$ platí

$$Q_Y \ll Q_P \quad \Rightarrow \quad Q_X \ll P_X \quad \& \quad \tfrac{\mathrm{d}Q_X}{\mathrm{d}P_X} = \tfrac{\mathrm{d}Q_Y}{\mathrm{d}P_Y}(h),$$

kde $h \in \mathbb{L}(\mathcal{S})^n$ je taková, že $Y = h(X)$. Speciálně pak při pozorování veličiny X nebo Y máme věrohodnostní poměr mezi Q a P ve tvaru

$$L = \tfrac{\mathrm{d}Q_X}{\mathrm{d}P_X}(X) = \tfrac{\mathrm{d}Q_Y}{\mathrm{d}P_Y}(Y).$$

Důkaz: Nechť $Q_Y \ll P_Y$ a $\mathrm{d}Q_Y = g\,\mathrm{d}P_Y$. Ukážeme, že $\mathrm{d}Q_X = g \circ h\,\mathrm{d}P_X$. Buď $F \in \mathcal{S}$, pak

$$\text{(8)} \qquad \textstyle\int_F g \circ h \,\mathrm{d}P_X = E_P[g(h(X)); X \in F] = E_P[g(Y); X \in F] = E_P[g(Y) \cdot P(X \in F|Y)]$$

Protože Y je postačující statistika pro X vzhledem k $\{P, Q\}$, tj. $P_{X|Y} \overset{\text{sj}}{=} Q_{X|Y}$, platí

$$Q(X \in F|Y) \overset{\text{sj}}{=} P(X \in F|Y) \quad \text{kdykoli}^{10} \quad F \in \mathcal{S}.$$

S využitím této vlastnosti dostaneme, že (8) je rovno

$$E_P[g(Y) \cdot Q(X \in F|Y)] = \textstyle\int \frac{\mathrm{d}Q_Y}{\mathrm{d}P_Y} \cdot Q(X \in F|Y = y)\,\mathrm{d}P_Y(y) = E_Q[Q(X \in F|Y)] = Q(X \in F) = Q_X(F).$$

Speciálně tak $P_X \ll Q_X$ a platí $\frac{\mathrm{d}Q_X}{\mathrm{d}P_X} = g \circ h = \frac{\mathrm{d}Q_Y}{\mathrm{d}P_Y} \circ h$. ***Q.E.D.***

Cvičení Buď N_t Poissonův proces s (neznámou) intenzitou $\lambda > 0$.

- Ukažte, že N_t je postačující statistika pro veličinu $N|_t$.
- Spočtěte věrohodnostní poměr mezi $H_1 : \lambda = \lambda_1$ a $H_0 : \lambda = \lambda_0$ a ukažte, že je to martingal za platnosti hypotézy H_0.

[10] Toto je obecnější definice postačující statistiky v případě, že podmíněné rozdělení X za podmínky Y nemusí existovat.

Je-li W_t Wienerův proces, $\mu \in \mathbb{R}$, pak předpisem $B_t = W_t + \mu t$ definujeme ***Wienerův proces s driftem*** μ.

Poznámka: Je-li $B_t = W_t + \mu t$ Wienerův proces s dritem, pak proces

$$B_t^0 = B_t - tB_1 = W_t - tW_1, \quad t \in [0,1]$$

nazýváme ***Brownovým mostem***.

Cvičení Buď $B_t = W_t + \mu t$ Wienerův proces s neznámým driftem μ.

- Ukažte, že B_t^0 má všechny konečně rozměrná rozdělení normální s nulovou střední hodnotou. Spočtěte jeho autokovarianční funkci $\operatorname{cov}(B_s^0, B_t^0) = st - s \wedge t$.
- Ukažte, že proces B^0 je nezávislý s veličinou W_1.
- Ukažte, že B_t je postačující statistikou pro $B|_t$, kdykoli $t \geq 0$.
- Spočtete věrohodnostní poměr mezi $H_1 : \mu = \mu_1$ a $H_0 : \mu = \mu_0$ založené na pozorování $B|_t$ a ukažte, že takto získaný proces je martingalem za platnosti hypotézy H_0.

Poznámka: Z předchozího lemmatu plyne, že odpovídající věrohodnostní poměr mezi $H_1 : \mu = \mu_1$ a $H_0 : \mu = \mu_0$ je za platnosti hypotézy H_0 tvaru

$$L_t = \frac{f_{H_1}(B_t)}{f_{H_0}(B_t)} = \exp\{\lambda W_t - \tfrac{1}{2}\lambda^2 t\}, \qquad \lambda = \mu_1 - \mu_0.$$

Pokud bychom čistě hypoteticky zajímali o maximálně věrohodný odhad paramteru μ resp. $\lambda = \mu - \mu_0$, pak stačí argument exponenciely derivovat dle λ, čímž dostaneme maximálně věrohodný odhad ve tvaru

$$\hat{\lambda}_t = \tfrac{1}{t} W_t, \quad \text{tj.} \quad \hat{\mu}_t = \mu_0 + \tfrac{1}{t} W_t = \tfrac{1}{t} B_t.$$

Poznámka: Tento maximálně věrohodný odhad je zřejmě $\mathbb{L}_2$-konzistení ve smyslu

$$\tfrac{1}{t} W_t \xrightarrow{\mathbb{L}_2} 0, \quad t \to \infty, \quad \text{neboť} \quad E(\tfrac{1}{t} W_t)^2 = t^{-1} \to 0, \quad \text{pro} \quad t \to \infty.$$

Velmi snadno jsme schopni získat i konvergenci skoro jistě tj. silnou konzistenci tohoto odhadu, což není nic jiného než silmý zákon velkých čísel pro Wienerův proces.

Tvrzení (Silný zákon velkých čísel pro Wienerův proces) Buď W_t Wienerův, pak platí

$$\tfrac{1}{t} W_t \xrightarrow{\text{sj}} 0, \quad t \to \infty, \quad \text{či svérázněji} \quad W_t \stackrel{\text{sj}}{=} o(t), \quad t \to \infty.$$

Důkaz: Protože $E(|W|_t^*)^2 \leq 4EW_t^2 = 4t$, platí

$$E \textstyle\sum_n (\frac{1}{n^2}|W|_{n^2}^*)^2 \leq 4 \sum_n n^{-2} < \infty.$$

Odtud ihned plyne, že $|W|_{n^2}^* \stackrel{\text{sj}}{=} o(n^2)$. Označme $T = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$, pak také

$$|W_t| \leq |W|_t^* \leq |W|_{\lceil t \rceil_T}^* \stackrel{\text{sj}}{=} o(\lceil t \rceil_T) = o(t), \quad t \to \infty,$$

neboť pro $(n+1)^2 = \lceil t \rceil_T$ platí, že $1 \leq \frac{\lceil t \rceil_T}{t} \leq \frac{(n+1)^2}{n^2} \to 1$ pro $n \to \infty$. ***Q.E.D.***

Poznámka: Chceme-li mít skutečně hmatatelnou představu o limitním chování trajektorií Wienerova procesu, nezbývá než uvést zákon iterovaného logaritmu. Buď W_t Wienerův proces a $a_t = \sqrt{t \ln \ln t}$, pak

$$\limsup_{t \to \infty} \tfrac{1}{a_t} W_t \stackrel{\text{sj}}{=} \sqrt{2} \quad \text{a symetricky} \quad \liminf_{t \to \infty} \tfrac{1}{a_t} W_t \stackrel{\text{sj}}{=} -\sqrt{2}.$$

7. Elementární stochastická integrace a elementární Per Partés

Buď $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ filtrace. Proces H_t nazveme ***jednoduchým $\mathcal{F}_t$-predikovatelným procesem***, je-li tvaru

$$H_t = \sum_{k \in N} \hat{H}_{t_{k-1}} \cdot 1_{[t_{k-1} < t \leq t_k]}, \quad t \in [0,\infty)^{(N)}, N \subseteq \mathbb{N}, \tag{9}$$

kde $t_0 = 0$ dle definice a kde $\hat{H}_s \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_s)$ pro $s \in T = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k; k \in N\}$.

Proces H_t je jednoduchým $\mathcal{F}_t$-predikovatelným procesem právě tehdy, když je $\mathcal{F}_t$-predikovatelný proces a jednoduchý v tom smyslu, že existuje lokálně konečná $T \subseteq [0,\infty)$ taková, že H_t je roven zleva spojité verzi procesu $H_{\lfloor t \rfloor_T}$.

Jednodychý $\mathcal{F}_t$-predikovatelný proces může představovat jednoduchou strategii investování do nějakého zboží (akcie), kdy hodnota H_t představuje počet akcií, které investor drží v čase $t \geq 0$. Stejně tak může představovat počet kontraktů futures uzavřených v čase $t \geq 0$. Je-li proces X_t cena akcie či futures, pak se proces investorova bohatství Y_t dá vyjádřit ve tvaru

$$Y_t = Y_0 + \sum_{k \in N} \hat{H}_{t_{k-1}}(X_{t \wedge t_k} - X_{t \wedge t_{k-1}}) = Y_0 + \oint_0^t H_s \, \mathrm{d}X_s, \tag{10}$$

přičemž druhou rovnost vnímáme jako definiční pro poslední člen pravé strany, který nazýváme ***jednoduchým (stochastickým) integrálem*** procesu H dle procesu X.

Z definice elementárního integrálu lze přímo ověřit, že tento elementární integrál je definován korektně ve smyslu nezávislosti výsledku na volbě lokálně konečné dělící množiny $T \subseteq [0, \infty)$. Speciálně je tak tento integrál stabilní vůči případnému zjemnění množiny T.

Dále si můžeme představit, že hodnota procesu Y_t je tržní cena nějakého podílového fondu a my spekulujeme na budoucí vývoj této tržní ceny. Uvažujme strategii danou $\mathcal{F}_t$-redikabilním procesem K_t, pak analogicky jako v případě výpočtu hodnoty procesu Y_t dospějeme k závěru, že naše bohatství můžeme vyjádřit ve tvaru

$$Z_t = Z_0 + \oint_0^t K_s \, \mathrm{d}Y_s. \tag{11}$$

Vzhledem ke stabilitě elementárního stochastického integrálu vzhledem ke zjemnění základní dělící množiny, můžeme předpokládat, že množina $T = \{t_k : k \in N\}, n \subseteq \mathbb{N}$ je společnou základnou pro definici obou elementárních stochastických integrálů (10) a (11). V opačném případě přecházíme ke společnému zjemnění obou základen. I bez výše zavedeného předpokladu snadno dojdeme k závěru, že proces $K_t H_t$ je opět jednoduchý $\mathcal{F}_t$-predikabilní se základnou, která je sjednocením základen procesů K_t a H_t. Právě představa společné základny obou procesů nám umožňuje snadněji ověřit platnost následujícího vztahu

$$\oint_0^t K_s \, \mathrm{d}Y_s = \textstyle\sum_k \hat{K}_{t_{k-1}}(Y_{t \wedge t_k} - Y_{t \wedge t_{k-1}}) = \sum_k \hat{K}_{t_{k-1}} \hat{H}_{t_{k-1}}(X_{t \wedge t_k} - X_{t \wedge t_{k-1}}) = \oint_0^t K_s H_s \, \mathrm{d}X_s.$$

Tato vlastnost elementárního integrálu nás tak vede ke snaze ve značení vynechávat znaménko integrálu. Místo rovnosti (10) tak budeme psát $\boldsymbol{dY_t = H_t \circ dX_t}$, přičemž na obou stranách mluvíme jako o ***elementárním stochastickém diferenciálu***. Pro takto zavedené symbolické značení platí

$$\mathrm{d}Z_t = K_t \circ \mathrm{d}Y_t = K_t \circ (H_t \circ \mathrm{d}X_t) = K_t H_t \circ \mathrm{d}X_t,$$

což není nic jiného než diferenciální zápis následujícího integrálního zápisu, který dává dohromady strategii H_t na primárním trhu a strategii K_t na trhu sekundárním

$$Z_t = Z_0 + \oint_0^t K \, \mathrm{d}Y = Z_0 + \oint_0^t K \, \mathrm{d}(\oint H \, \mathrm{d}X) = Z_0 + \oint_0^t KH \, \mathrm{d}X,$$

přičemž pro přehlednost operativně vynecháváme vázanou integrační proměnnou. Z čistě symbolicko-intuitivního přístupu tak dochází ke krácení diferenciálu a integrálu ve smyslu

$$\mathrm{d} \oint H \, \mathrm{d}X = H \circ \mathrm{d}X.$$

Z čistě symbolického hlediska, znaménko pro diferenciál d se vyruší se znaménkem pro integrál $\int$ a z elementárního integračního znaménka $\oint$ tak pouze zbyde elementární znaménko $\circ$, které se nyní spojí s novým diferenciálem a hraje pak integrační roli mezi primární strategií H a cenou X na primárním trhu.

7.1. **Elementární kvadratická variace a elemtentární stochastické Per Partés.** Buď nyní

$$T = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k; k \in N\}$$

daná lokálně konečná množina $T \subseteq [0, \infty)$, kde $N \subseteq \mathbb{N}$. Naším cílem je vyjádřit druhou mocninu X_t^2 ceny X_t na primárním trhu pomocí elementární stochastické integrace. Začneme rozpisem této hodnoty pomocí dělících bodů množiny T a to ve tvaru

$$X_t^2 - X_0^2 = \sum_{k \in N} X_{t \wedge t_k}^2 - X_{t \wedge t_{k-1}}^2 = 2 \sum_{k \in N} X_{t_{k-1}}(X_{t \wedge t_k} - X_{t \wedge t_{k-1}}) + \sum_{k \in N} (X_{t \wedge t_k} - X_{t \wedge t_{k-1}})^2.$$

Pomocí elementárního stochastického integrálu tak můžeme psát

$$X_t^2 = X_0^2 + 2 \oint_0^t X_{\lfloor s \rfloor_{T-}} \, \mathrm{d}X_s + \oint_0^t (\, \mathrm{d}X_s)_T^2,$$

kde $X_{\lfloor t \rfloor_{T-}} \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_{t\uparrow})$ označuje zleva spojitou (predikabilní) verzi procesu $X_{\lfloor t \rfloor_T} \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$ a kde

$$\boldsymbol{[\, X\,]_t^T = \oint_0^t (\, dX_s)_T^2} = \textstyle\sum_{k \in N} (X_{t \wedge t_k} - X_{t \wedge t_{k-1}})^2$$

značí ***elementární kvadratickou variaci*** procesu X vzhledem k dělení T. Pro elementární kvadratickou variaci $[\, Y\,]_t^T$ ceny Y_t na sekundárním trhu vzhledem k dělení T máme

$$[\, Y\,]_t^T = \textstyle\sum_{k \in N} (Y_{t \wedge t_k} - Y_{t \wedge t_{k-1}})^2 = \sum_{k \in N} \hat{H}_{t_{k-1}}^2 (X_{t \wedge t_k} - X_{t \wedge t_{k-1}})^2 = \oint_0^t H_s^2 \, \mathrm{d}[\, X\,]_s^T = \boldsymbol{\oint_0^t H_s^2 (\, dX_s)_T^2},$$

přičemž poslední rovnost bereme jako definiční v souladu se substitučním pravidlem $\mathrm{d}[X]_t^T = (\mathrm{d}X_t)^2_T$, které říká, že dle diferenciálu $(\mathrm{d}X_t)^2_T$ integrujeme tak, jako by na jeho místě stál diferenciál $\mathrm{d}[X]_t^T$. Předchozí odsazenou formuli tak můžeme symbolicky zapisovat ve tvaru elementárního kvadratického diferenciálu

$$(\mathrm{d}Y_t)^2_T = (H_t \circ \mathrm{d}X_t)^2_T = H_t^2 \circ (\mathrm{d}X_t)^2_T.$$

Závěrem uvedeme diferenciální analogii integrální rovnosti pro druhou mocninu X_t^2 ve tvaru

$$\mathrm{d}X_t^2 = 2X_{\lfloor t\rfloor_{T-}} \circ \mathrm{d}X_t + (\mathrm{d}X_t)^2_T. \tag{12}$$

Pro úplnost uvedeme i odpovídající formuli pro druhou mocninu Y_t^2 ceny na sekundárním trhu

$$\mathrm{d}Y_t^2 = 2Y_{\lfloor t\rfloor_{T-}} \circ \mathrm{d}Y_t + (\mathrm{d}Y_t)^2_T = 2Y_{\lfloor t\rfloor_{T-}} H_t \circ \mathrm{d}X_t + H_t^2 \circ (\mathrm{d}X_t)^2_T.$$

Na závěr je třeba připomenout předpoklad, že body nespojitosti jednoduchého $\mathcal{F}_t$-predikabilního procesu jsou podmnožinou naší pevně dané lokálně konečné množiny $T \subseteq [0,\infty)$.

Vzhledem ke kvadratickému charakteru elementární kvadratické variace, můžeme pomocí následující polarizační formule zadefinovat odpovídající bilineární ekvivalent. Pro U_t, V_t reálné procesy na $[0,\infty)$ a $0 \in T = \{0 = t_0 < t_1 < \dots t_k; k \in N\} \subseteq [0,\infty)$ lokálně konečnou množinu předpisem

$$[U,V]_t^T = \tfrac{[U+V]_t^T - [U-V]_t^T}{4} = \sum_{k\in N} (U_{t\wedge t_k} - U_{t\wedge t_{k-1}})(V_{t\wedge t_k} - V_{t\wedge t_{k-1}})$$

definujeme ***elementární kovariaci*** procesů U, V vzhledem k dělení T. Pro elementární diferenciál právě zavedeného procesu budeme také používat intuitivní označení

$$(\boldsymbol{dU_t})_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{dV_t})_{\boldsymbol{T}} = \mathrm{d}[U,V]_t^T = \tfrac{\mathrm{d}[U+V]_t^T - \mathrm{d}[U-V]_t^T}{4} = \tfrac{\mathrm{d}(U+V)^2_T - \mathrm{d}(U-V)^2_T}{4}.$$

Připomínáme, že elementární diferenciál vnímáme jako symbol sloužící k jednoduchému intuitivnímu zápisu integrální rovnice. Z takové elementární diferenciální rovnice (12) pak okamžitě dostaneme rovnost

$$U_tV_t = U_0V_0 + \oint_0^t U_{\lfloor s\rfloor_{T-}} \,\mathrm{d}V_s + \oint_0^t V_{\lfloor s\rfloor_{T-}} \,\mathrm{d}U_s + [U,V]_t^T,$$

kterou budeme symbolicky zkracovat ve formě elementární stochastické diferenciální rovnosti

$$\mathrm{d}U_tV_t = U_{\lfloor t\rfloor_{T-}} \circ \mathrm{d}V_t + V_{\lfloor t\rfloor_{T-}} \circ \mathrm{d}U_t + (\mathrm{d}U_t)_T(\mathrm{d}V_t)_T.$$

Tuto rovnost nazýváme ***elementární stochastickou rovností Per Partés*** vzhledem k T.

8. $\mathbb{L}_2$-stochastická integrace

Buď $(X_t, t \geq 0)$ zprava spojitý $\mathbb{L}_2$ $\mathcal{F}_t$-martingal. Pak kompenzátor K_t procesu X_t^2 nazveme ***kvadratickým $\mathcal{F}_t$-kompenzátorem*** procesu X_t. Lze-li navíc najít $\mathcal{F}_t$-kompenzátor K_t ve tvaru $\sigma^2 t$, řekneme, že X_t je ***$\mathcal{F}_t$-martingal s lineárně kvadratickým kompenzátorem*** s konstantou (linearity) σ^2. Pokud výše uvažovaný proces X_t staruje z $X_0 = 0$, platí

$$\mathrm{var}(X_t) = EX_t^2 = \sigma^2 t.$$

Příklady takových procesů jsou

- Wienerův proces W_t s $\sigma^2 = 1$ (popř. $W_{\sigma^2 t}$ nebo σW_t)
- centrovaný (nebo také kompenzovaný) Poissonův proces $N_t - EN_t = N_t - \lambda t$ s intenzitou $\lambda = \sigma^2$.

Poznámka $\mathcal{F}_t$-Wienerův proces je jediný[11] spojitý $\mathcal{F}_t$-martingal s kvadratickým kompenzátorem t. Naopak kompenzovaný Poissonův proces $M_t = N_t - EN_t$ s jednotkovou intenzitou je příkladem nespojitého martingalu se stejným kompenzátorem.

Lemma Buď X, Y nezáporné integrovatelné veličiny, pokud $E[X|Y] \in \mathbb{L}_\infty(Y)$, pak $XY \in \mathbb{L}_1$.

[11] Tomuto tvrzení se říká Lévyho věta o charakterizaci Wienerova procesu, která říká, že každý spojitý lokální $\mathcal{F}_t$-martingal W_t, který startuje z $W_0 = 0$, takový, že $W_t^2 - t$ je opět lokální $\mathcal{F}_t$ martingal, je $\mathcal{F}_t$-Wienerův proces. Obecně ke každému spojitému lokálnímu $\mathcal{F}_t$ martingalu X_t startujícímu z $X_0 = 0$ existuje neklesající spojitý $\mathcal{F}_t \vee \sigma(\mathcal{N})$-adaptovaný proces $\langle X\rangle_t$ takový, že $X_t^2 - \langle X\rangle_t$ je lokální $\mathcal{F}_t \vee \sigma(\mathcal{N})$-martingal, kde $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F}_\infty : P(N) = 0\}$. Tomuto procesu $\langle X\rangle$ se říká ***kvadratická variace*** a skutečně v určitém smyslu hraje roli druhé (kvadratické) variace odpovídajícího procesu. Další (DDS) věta říká, že více-méně každý lokální martingal si lze představovat ve tvaru $X_t = W(\langle X\rangle_t)$, kde W je nějaký Wienerův proces.

Důkaz: Nechť $0 \le E[X|Y] \overset{\text{sj}}{\le} m \in \mathbb{N}$, pak

$$EXY = \lim_{n\to\infty} E[XY; Y \le n] = \lim_{n\to\infty} E[Y\, E(X|Y); Y \le n] \le m \cdot EY < \infty.$$

Důsledek: Buď X_t $\mathcal{F}_t$-martingal s lineárně kovadratickým kompenzátorem a H_t jednoduchý $\mathcal{F}_t$-predikovatelný $\mathbb{L}_2$-integrovatelný proces s lokálně konečnou dělící množinou $T = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k; k \in N\}, N \subseteq \mathbb{N}$. Pak

$$Y_t = \oint_0^t H \,\mathrm{d}X = \sum_{k\in N} H_{t_{k-1}}(X_{t\wedge t_k} - X_{t\wedge t_{k-1}}) \in \mathbb{L}_2$$
$$[Y]_t^T = \oint_0^t (\,\mathrm{d}Y)_T^2 = \sum_{k\in N} (Y_{t\wedge t_k} - Y_{t\wedge t_{k-1}})^2 \in \mathbb{L}_1.$$

Speciálně pro elementární kvadratickou variaci $Z_t = [Y]_t^T$ procesu Y vzhledem k dělící množině T platí

$$Z_t = [\oint H \,\mathrm{d}X]_t^T = \oint_0^t (H \circ \mathrm{d}X)_T^2 = \oint_0^t H^2 \circ (\,\mathrm{d}X)_T^2 = \sum_{k\in N} H_{t_{k-1}}^2 (X_{t\wedge t_k} - X_{t\wedge t_{k-1}})^2 \in \mathbb{L}_1.$$

Důkaz: Veličina $Y_t = \oint_0^t H_s \,\mathrm{d}X_s$ jakožto konečná suma součinu $\mathbb{L}_2$-integrovatelných veličin je integrovatelná. Dále z předchozí části textu víme, že

$$Y_t^2 = Z_t + 2 \oint_0^t Y_{\lfloor s \rfloor_T -} H_s \,\mathrm{d}X_s,$$

kde $Y_{\lfloor t \rfloor_T -} \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_{t\uparrow})$ označuje zleva spojitou (predikabilní) verzi procesu $Y_{\lfloor t \rfloor_T} \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$. Ze Schwarzovy nerovnosti dále dostaneme, že

$$E|(X_{t\wedge t_k} - X_{t\wedge t_{k-1}})(X_{t\wedge t_j} - X_{t\wedge t_{j-1}})| \le \sigma^2$$

a z předchozího lemmatu, že pak

$$|H_{t_{k-1}} H_{t_{j-1}} (X_{t\wedge t_k} - X_{t\wedge t_{k-1}})(X_{t\wedge t_j} - X_{t\wedge t_{j-1}})| \in \mathbb{L}_1,$$

což v konečném důsledku znamená, že také po lokálně konečném nasčítání dostaneme

$$Y_t^2 = \sum_{j,k\in N} H_{t_{k-1}} H_{t_{j-1}} (X_{t\wedge t_k} - X_{t\wedge t_{k-1}})(X_{t\wedge t_j} - X_{t\wedge t_{j-1}}) \in \mathbb{L}_1,$$

tj. $Y_t \in \mathbb{L}_2$ pro $t \ge 0$. Pak $[Y]_t^T \in \mathbb{L}_1$ pak plyne přímo z definice, neboť opět lokálně konečná suma integrovatelných procesů je integrovatelný proces.[12] ***Q.E.D.***

Tvrzení Buď X_t $\mathcal{F}_t$-martingal s kvadratickým kompenzátorem $\sigma^2 t$ a H_t jednoduchý $\mathcal{F}_t$-predikovatelný proces. Označme $K_t = \sigma^2 \int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}s$. Pokud je K_t integrovatelný proces, pak $Y_t = \oint_0^t H_s \,\mathrm{d}X_s$ je $\mathbb{L}_2$ $\mathcal{F}_t$-martingal. Speciálně pak platí

$$E \oint_0^t H_s \,\mathrm{d}X_s = 0$$

Důkaz: Protože pro každé $t \ge 0$ je Y_t konečnou sumou součinů $\mathbb{L}_2$-integrovatelých veličin, platí $Y_t \in \mathbb{L}_1$. Je-li $t_{k-1} \le s < t \le t_k$, pak

$$E[Y_t - Y_s|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{=} E[H_{t_{k-1}}(X_t - X_s)|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{=} H_{t_{k-1}} \cdot E[X_t - X_s|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{=} 0.$$

Speciálně volbou $s = t_{k-1} < t_k = t$ dostaneme

$$E[H_{t_{k-1}}(X_{t\wedge t_k} - X_{t\wedge t_{k-1}})|\mathcal{F}_{t_{k-1}}] \overset{\text{sj}}{=} 0.$$

Pro $s = t_{n-1} < t = t_m$, pak nasčítáním dostaneme

$$E[Y_t - Y_s|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{=} E[\textstyle\sum_{k=n}^m H_{t_{k-1}}(X_{t\wedge t_k} - X_{t\wedge t_{k-1}})|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{=} 0.$$

S využitím první odsazené formule postupným podmiňováním pro $\lceil s \rceil_T = t_n \le t_m = \lfloor t \rfloor_T$ dostaneme

$$E[Y_t|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{=} E[E(E(Y_t|\mathcal{F}_{t_m})|\mathcal{F}_{t_n})|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{=} E[E(Y_{t_m}|\mathcal{F}_{t_n})|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{=} E[Y_{t_n}|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{=} Y_s.$$

Q.E.D.

Tvrzení Buď X_t $\mathcal{F}_t$-martingal s kvadratickým kompenzátorem $\sigma^2 t$ a H_t jednoduchý $\mathcal{F}_t$-predikovatelný proces s dělící lokálně konečnou množinou T. Označme

$$Y_t = \oint_0^t H_s \,\mathrm{d}X_s \quad \text{a} \quad K_t = \sigma^2 \int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}s$$

[12] Tady nepoužíváme nic jiného než tvrzení, že konečná suma integrovatelných veličin je integrovatelná veličina. Kolik sčítanců v sumě závisí na hodnotě t, proto říkáme: lokálně konečná suma

Pokud je K_t integrovatelný proces, pak $Y_t^2, Z_t = [Y]_t^T$ mají společný $\mathcal{F}_t$-kompenzátor K_t. Speciálně pak

$$\mathrm{var}(\oint_0^t H_s \,\mathrm{d}X_s) = \sigma^2 E \int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}s.$$

Důkaz: Z předchozího textu již víme, že procesy Y_t^2, Z_t jsou integrovatelné. Označme

$$V_t = Z_t - K_t = \sum_{k\in N} H_{t_{k-1}}^2[(X_{t\wedge t_k} - X_{t\wedge t_{k-1}})^2 - \sigma^2(t\wedge t_k - t\wedge t_{k-1})]$$

Podobně jako v předchozím důkazu pro $t_{k-1} \le s < t \le t_k$ dostaneme

$$E[V_t - V_s|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{=} H_{t_{k-1}}^2 E[(X_t - X_{t_{k-1}})^2 - (X_s - X_{t_{k-1}})^2 - \sigma^2(t-s)|\mathcal{F}_s]$$
$$\overset{\text{sj}}{=} H_{t_{k-1}}^2\{E[X_t^2 - X_s^2 - \sigma^2(t-s)|\mathcal{F}_s] + 2X_{t_{k-1}}E[X_t - X_s|\mathcal{F}_s]\} \overset{\text{sj}}{=} 0.$$

Pro $s = t_{n-1} < t = t_m$, pak nasčítáním opět dostaneme $E[V_t - V_s|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{=} 0$. S využitím druhé odsazené formule postupným podmiňováním pro $\lceil s\rceil_T = t_n \le t_m = \lfloor t\rfloor_T$ opět dostaneme

$$E[V_t|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{=} E[E(E(V_t|\mathcal{F}_{t_m})|\mathcal{F}_{t_n})|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{=} E[E(V_{t_m}|\mathcal{F}_{t_n})|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{=} E[V_{t_n}|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{=} V_s.$$

Naprosto analogicky bychom ukázali, že je $\mathcal{F}_t$-martingal i následující proces

$$U_t = \sum_{k\in N} Y_{t_{k-1}} H_{t_{k-1}}(X_{t\wedge t_k} - X_{t\wedge t_{k-1}}).$$

Platí tedy, že následující procesy jsou $\mathcal{F}_t$-martingaly: $V_t = Z_t - K_t, Y_t^2 - K_t = Z_t - K_t + 2U_t.$ ***Q.E.D.***

Shrnutí: Buď X_t $\mathcal{F}_t$-martingal s kvadratickým kompenzátorem $\sigma^2 t$ a H_t jednoduchý $\mathcal{F}_t$-predikovatelný proces s lokálně konečnou dělící množinou T. Pak proces $Y_t = \oint_0^t H\,\mathrm{d}X$ je $\mathcal{F}_t$-martingal s kvadratickým kompenzátorem $K_t = \sigma^2\int_0^t H_s^2\,\mathrm{d}s$ ovšem za předpokladu, že tento „kompenzátor" je integrovatelný proces. Při splnění zmíněných předpokladů pak platí rovnosti

$$E\oint_0^t H_s \,\mathrm{d}X_s = 0, \quad \mathrm{var}(\oint_0^t H_s\,\mathrm{d}X_s) = \sigma^2 E\int_0^t H_s^2\,\mathrm{d}s = EK_t = E\oint_0^t H_s^2(\,\mathrm{d}X_s)_T^2.$$

Symbolem $R(0,t)$ budeme rozumět rovnoměrné rozdělení ina intervalu $(0,t)$ a symbolem $\mathbb{P}_t = R(0,t)\otimes P$ odpovídající součinovou míru, přčemž předpokládáme, že pracujeme na základním pravděpodobnostním prostoru $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Dále symbolem $||H||_2$ označíme $\mathbb{L}_2$-normu v prostoru $\mathbb{L}_2(\mathbb{P}_t)$ a analogicky $||H||_1$ odpovídající $\mathbb{L}_1$-normu v $\mathbb{L}_1(\mathbb{P}_t)$.

Lemma Buďte H, K jednoduché $\mathcal{F}_t$-predikabilní procesy, $a, b\in\mathbb{R}$ a X buď $\mathcal{F}_t$-martingal s kvadratickým kompenzátorem $\sigma^2 t$, pak

$$a\oint_0^t H_s\,\mathrm{d}X_s + b\int_0^t K_s\,\mathrm{d}X_s = \oint_0^t a\,H_s\,\mathrm{d}X_s + \int_0^t b\,K_s\,\mathrm{d}X_s, \quad t\ge 0.$$
$$E\sup_{s\le t}|\oint_0^s H_u\,\mathrm{d}X_u|^2 = E(|\oint H_s\,\mathrm{d}X_s|_t^*)^2 \le 4\sigma^2 E\int_0^t H_s^2\,\mathrm{d}s, \quad t\ge 0.$$

Důkaz: První rovnost je zřejmá z definice. Buď dále $t\ge 0$ a nechť $\int_0^t H_s^2\,\mathrm{d}s\in\mathbb{L}_1$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že proces $\int_0^t H_s^2\,\mathrm{d}s$ integrovatelný, jinak bychom přešli k jednoduchému predikabilnímu proces $\bar{H}_s = H_s\cdot 1_{[s\le t]}$ nebo bychom řekli, že dokazovaná nerovnost platí triviálně. Protože je již proces $\int H_s^2\,\mathrm{d}s$ integrovatelný, je proces $\oint H_s\,\mathrm{d}X_s$ je centrovaný $\mathbb{L}_2$-martingal s rozptylem $\sigma^2 E\int H_s^2\,\mathrm{d}s$. Z momentové maximální nerovnosti pro $\mathbb{L}_2$-martingal pak dostáváme, že

$$E(|\oint H_s\,\mathrm{d}X_s|_t^*)^2 \le 4E(\oint_0^t H_s\,\mathrm{d}X_s)^2 = 4\sigma^2 E\int_0^t H_s^2\,\mathrm{d}s.$$

Q.E.D.

Abychom mohli definovat integrál $\int_0^t H_s\,\mathrm{d}s$ byl vhodně měřitelnou veličinou, potřebujeme dle např. Fubiniovy věty součinovou měřitelnost. O procesu $H_t\in\mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$ řekneme, že je ***$\mathcal{F}_t$-progresivně (postupně) měřitelný***, pokud postupně pro každé $t\ge 0$ máme následující měřitelnost

$$H|_t : \mathcal{B}[0,t]\otimes\mathcal{F}_t \to \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad t\ge 0,$$

kde pro jednoduchost a přehlednost zápisu místo měřitelných prostorů píšeme pouze σ-algebry.

Tvrzení Je-li $(X_t, t\ge 0)$ zleva či zprava spojitý $\mathcal{F}_t$-adaptovaný proces, pak je $\mathcal{F}_t$-progresivní.

Důkaz: Buď $t\ge 0$ pevné a $\{0,t\}\subseteq T_n\subseteq [0,t]$ rostoucí posloupnost lokálně konečných podmnožin postupně zahušťující interval $[0,t]$. Pro zprava resp. zleva spojitý $\mathcal{F}_t$-adaptovaný proces X_t postupně dostaneme

$$X|_t = \lim_{n\to\infty}(X_{\lceil s\rceil_{T_n}}, s\in[0,t]) \in \mathbb{L}(\mathcal{B}[0,t]\otimes\mathcal{F}_t)$$
$$X|_t = \lim_{n\to\infty}(X_{\lfloor s\rfloor_{T_n}}, s\in[0,t]) \in \mathbb{L}(\mathcal{B}[0,t]\otimes\mathcal{F}_t),$$

neboť pro lokálně konečnou $\{0,t\} \subseteq T \subseteq [0,t]$ při použití zástupného symbolu $[\,s\,]_T$ místo $\lceil s \rceil_T$, $\lfloor s \rfloor_T$ platí

$$\{(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega : X([\,s\,]_T, \omega) < c\} = \bigcup_{r \in T} \{s \in [0,t] : [\,s\,]_T = r\} \times [X_r < c] \in \mathcal{B}[0,t] \otimes \mathcal{F}_t^X \subseteq \mathcal{B}[0,t] \otimes \mathcal{F}_t.$$

Q.E.D.

Lemma Nechť X_t je $\mathcal{F}_t$-martingal s kvadratickým kompenzátorem $\sigma^2 t$. Buď $\mathbb{H}^{(n)}$ posloupnost jednoduchých $\mathcal{F}_t$-predikovatelných procesů takových, že pro každé $t \geq 0$ je posloupnost $\mathbb{H}^{(n)}|_t$ cauchyovská v $\mathbb{L}_2(\mathbb{P}_t)$. Pak pro každé $t \geq 0$ je posloupnost $\oint_0^t \mathbb{H}_s^{(n)}\, \mathrm{d}s$ cauchyovská v $\mathbb{L}_2(P)$. Je-li navíc pro každé $t \geq 0$

(13) $$\textstyle\sum_{n=1}^\infty ||H^{(n)}|_t||_{\mathbb{L}_2(\mathbb{P}_t)} < \infty,$$

kde $H^{(n)} = \mathbb{H}^{(n)} - \mathbb{H}^{(n-1)}$, pak předpis

(14) $$\mathbb{H} = \exists \lim_{n\to\infty} \mathbb{H}^{(n)}$$

definuje $\mathcal{F}_t$-predikovatelný proces takový, že $\mathbb{H}^{(n)}|_t \to \mathbb{H}|_t$ v $\mathbb{L}_2(\mathbb{P}_t)$ i $\mathbb{P}_t$-sj. kdykoli $t \geq 0$ a předpisem

(15) $$\textstyle\int_0^t \mathbb{H}_s\, \mathrm{d}X_s = \exists \lim_{n\to\infty} \oint_0^t \mathbb{H}_s^{(n)}\, \mathrm{d}X_s$$

definujeme $\mathcal{F}_t$-adaptovaný proces, takový, že až na P-nulovou množinu platí

(16) $$\textstyle\oint_0^t \mathbb{H}_s^{(n)}\, \mathrm{d}X_s \to \int_0^t \mathbb{H}_s\, \mathrm{d}s \;\; \text{lokálně stejnoměrně na } [0,\infty).$$

Důkaz: První část tvrzení plyne okamžitě z rovnosti

$$E|\textstyle\oint_0^t \mathbb{H}_s^{(n)}\, \mathrm{d}X_s - \oint_0^t H_s^{(m)}\, \mathrm{d}X_s|^2 = \mathrm{var}(\oint_0^t [\mathbb{H}_s^{(n)} - \mathbb{H}_s^{(m)}]\, \mathrm{d}X_s) = \sigma^2 E \int_0^t [\mathbb{H}_s^{(n)} - \mathbb{H}_s^{(m)}]^2\, \mathrm{d}s.$$

Buď $t \geq 0$ pevné, dle předpokladu a na základě vztahu mezi $\mathbb{L}_p$-normami na pravděpodobnostním prostoru dostaneme

$$\mathbb{E}_t \textstyle\sum_n |H^{(n)}|_t| = \sum_n \mathbb{E}_t |H^{(n)}|_t| = \sum_n ||H^{(n)}|_t||_{\mathbb{L}_1(\mathbb{P}_t)} \leq \sum_n ||H^{(n)}|_t||_{\mathbb{L}_2(\mathbb{P}_t)} < \infty.$$

Pro P_t-sv. $(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega$ je tak suma $\sum_n H^{(n)}|_t$ absolutně konvergentní. Z definice plyne, že $\mathbb{H}$ jakožto limitní součet predikovatelných procesů tam, kde odpovídající řada (neabsolutně) konverguje, je opět predikovatelný proces. Dále

$$\textstyle\sum_n ||\oint_0^t H_s^{(n)}\, \mathrm{d}X_s||_{\mathbb{L}_2(P)} = \sigma^2 \sum_n [E \int_0^t (H_s^{(n)})^2\, \mathrm{d}s]^{1/2} = \sigma^2 \sum_n ||H^{(n)}|_t||_{\mathbb{L}_2(\mathbb{P}_t)} < \infty.$$

A z momentové maximální nerovnosti pro zprava spojité $\mathbb{L}_2$-martingaly pro $t \geq 0$ dostaneme

$$E \textstyle\sum_n |\oint_0^\cdot H_s^{(n)}\, \mathrm{d}X_s|_t^* \leq \sum_n ||\, |\oint_0^\cdot H_s^{(n)}\, \mathrm{d}X_s|_t^*\, ||_{\mathbb{L}_2(P)} \leq 2 \sum_n ||\oint_0^t H_s^{(n)}\, \mathrm{d}X_s||_{\mathbb{L}_2(P)} < \infty.$$

Opět tak dostaneme, že předpis (15) korektně definuje $\mathcal{F}_t$-adaptovaný proces splňující (16). ***Q.E.D.***

Tvrzení Je-li $\tilde{\mathbb{H}}_t$ $\mathcal{F}_t$-progresivní proces takový, že $\int_0^t \tilde{\mathbb{H}}_s^2\, \mathrm{d}s$ je integrovatelný proces, pak existuje posloupnost $\mathcal{F}_t$-predikovatelných procesů $H^{(n)}$ splňující (13) tak, že pro $\mathcal{F}_t$-predikovatelný a $\mathcal{F}_t$-progresivní proces H_t z (14) platí $\tilde{\mathbb{H}}|_t = \mathbb{H}|_t$ v prostoru $\mathbb{L}_2(\mathbb{P}_t)$.

Proces $\mathbb{H}_t$ z předchozího lemmatu nazveme ***$\mathcal{F}_t$-predikabilním ekvivalentem*** $\mathcal{F}_t$-progresivního procesu H.

Důkaz: Je založen na následujícím lemmatu. Pro $n \in \mathbb{N}$ najdeme posloupnost $\mathbb{H}^{(n)}$ jednoduchých $\mathcal{F}_t$-predikovatelných procesů splňujících

$$||\tilde{\mathbb{H}} - \mathbb{H}^{(n)}||_{\mathbb{L}_2(\mathbb{P}_n)} \leq 2^{-n}.$$

Pak zřejmě $\tilde{\mathbb{H}}_s^{(n)} = \mathbb{H}_s^{(n)} \cdot 1_{[s \leq n]}$ je posloupnost jednoduchých $\mathcal{F}_s$-predikovatelných procesů konvergujících k $\tilde{\mathbb{H}}$ v $\mathbb{L}_2(\mathbb{P}_t)$ kdykoli $t \geq 0$ a to dostanečně rychle ve smyslu

$$\textstyle\sum_n ||\tilde{H}^{(n)}||_{\mathbb{L}_2(\mathbb{P}_t)} < \infty, \quad \text{kde} \quad \tilde{H}^{(n)} = \tilde{\mathbb{H}}^{(n)} - \tilde{\mathbb{H}}^{(n-1)}$$

Volba $\mathbb{H}$ z (14) dle odpovídajícího lemmatu dává hledaný proces splňující deklarované vlastnosti. ***Q.E.D.***

Lemma Buď $\tilde{\mathbb{H}}_t$ $\mathcal{F}_t$-progresivní proces takový, že $\int_0^t \tilde{\mathbb{H}}_s^2\, \mathrm{d}s$ je integrovatelný proces. Je-li $r \geq 0$ a $\varepsilon > 0$, pak existuje jednoduchý $\mathcal{F}_t$-predikovatelný proces $\mathbb{H}$ takový, že

$$||\tilde{\mathbb{H}} - \mathbb{H}||_{\mathbb{L}_2(\mathbb{P}_r)} < \varepsilon.$$

Důkaz: Prozatím odkládám.

Korektnost definice: Jsou-li $H^{(n)}, H^{[n]}$ dvě posloupnosti jednoduchých $\mathcal{F}_t$-predikovatelných procesů splňujících (13), pak platí

$$(\exists \lim_{n\to\infty} \oint_0^t \mathbb{H}_s^{(n)}\,\mathrm{d}X_s, t \ge 0) \overset{\text{sj}}{=} (\exists \lim_{n\to\infty} \oint_0^t \mathbb{H}_s^{[n]}\,\mathrm{d}X_s, t \ge 0),$$

což znamená, že předpis (15) korektně definuje proces

$$I = (\int_0^t \mathbb{H}_s\,\mathrm{d}X_s, t \ge 0),$$

který je až na množinu míry nula určen jednoznačně, a tento proces je skoro jistě opět zprava spojitý, jakožto sj.-limita zprava spojitých procesů v lokálně stejnoměrné konvergenci. Protože je to $\mathcal{F}_t$-adaptovaný proces, který je $\mathbb{L}_2$-limitou $\mathcal{F}_t$-martingalů, je to opět $\mathbb{L}_2$ $\mathcal{F}_t$-martingal. Nadále budeme výše zavedeným označením rozumět naopak zprava spojitý $\mathcal{G}_t$-adaptovaný proces, který je skoro jistě roven původnímu procesu, kde

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\mathcal{N}), \quad \mathcal{N} = \{F \in \mathcal{F}_\infty : P(F) = 0\}.$$

Protože je $\sigma(\mathcal{N}) \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_\infty$, je $\mathcal{F}_t$ nezávislým rozšířením filtrace $\mathcal{F}_t$, je proces I_t také $\mathbb{L}_2$ $\mathcal{G}_t$-martingalem. A totéž platí i pro nově posunutý význam procesu, který značíme symbolem

$$\int \mathbb{H}\,\mathrm{d}X = (\int_0^t \mathbb{H}\,\mathrm{d}X, t \ge 0) = (\int_0^t \mathbb{H}_s\,\mathrm{d}X_s, t \ge 0).$$

Na závěr je přeci jen vhodné připomenout souvislost procesů $\mathbb{H}^{(n)}$ s procesem $\mathbb{H}$. Procesy $\mathbb{H}^{(n)}$ jsou voleny tak, aby $\mathbb{H}^{(n)}|_t \to \mathbb{H}|_t$ v $\mathbb{L}_2(\mathbb{P}_t)$ konvergovaly dostatečně rychle pro každé $t \ge 0$.

Důkaz korektnosti: Jsou-li $\mathbb{H}^{(n)}, \mathbb{H}^{[n]}$ dvě alternativní posloupnosti konvergující v $\mathbb{L}_2(\mathbb{P}_t)$ dostatečně rychle ve smyslu (13) k $\mathcal{F}_t$-progresvnímu predikabilnímu procesu $\mathbb{H}$ pro každé $t \ge 0$, pak $\mathbb{H}^{\{n\}} = \mathbb{H}^{(n)} - \mathbb{H}^{[n]}$ konverguje dostatečně rychle k nule, jak ukážeme. Označme

$$H^{\{n\}} = \mathbb{H}^{\{n\}} - \mathbb{H}^{\{n-1\}}, \quad H^{(n)} = \mathbb{H}^{(n)} - \mathbb{H}^{(n-1)}, \quad H^{[n]} = \mathbb{H}^{[n]} - \mathbb{H}^{[n-1]}.$$

Pak $H^{\{n\}} = H^{(n)} - H^{[n]}$ a platí

$$\sum_n ||H^{\{n\}}||_{\mathbb{L}_2(\mathbb{P}_t)} \le \sum_n ||H^{(n)}||_{\mathbb{L}_2(\mathbb{P}_t)} + \sum_n ||H^{[n]}||_{\mathbb{L}_2(\mathbb{P}_t)} < \infty.$$

Dle lemmatu procesy $\oint \mathbb{H}^{\{n\}}\,\mathrm{d}X = \oint \mathbb{H}^{(n)}\,\mathrm{d}X - \oint \mathbb{H}^{[n]}\,\mathrm{d}X$ konvergují lokálně stejnoměrně skoro jistě. Protože

$$E|\oint_0^t \mathbb{H}^{\{n\}}\,\mathrm{d}X|^2 = \sigma^2 E\int_0^t (\mathbb{H}_s^{\{n\}})^2\,\mathrm{d}s \to 0, \quad n \to \infty,$$

je takovou limitou například identická nula. ***Q.E.D.***

Cvičení: (i) Buďte $Y_k, k \in \mathbb{N}$ nezávisle stejně rozdělené náhodné veličiny a N Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$ nezávislý s $\mathcal{F}_\infty^Y$. Ukažte (pomocí charakteristických funkcí), že pak proces

$$S_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k \tag{17}$$

má nezávislé přírůstky a spočtěte jeho střední hodnotu, pokud $Y_1 \in \mathbb{L}_1$ a rozptyl, pokud $Y_1 \in \mathbb{L}_2$.
(ii) Ukažte, že, je-li proces S_t centrovaný s konečným rozptylem, je to $\mathcal{F}_t$-martingal s lineárně kvadratickým kompenzátorem.

Proces S_t z (17) se nazývá ***složený Poissonův proces s intenzitou*** skoků $\boldsymbol{\lambda} > 0$ a s velikostmi skoků s rozdělením P_{Y_1}.

Poznámka: Kompenzovaný Poissonův proces a stejně tak složený Poissonův proces jsou příklady procesů s lokálně konečnou variací a pro tyto procesy není třeba zavádět speciální stochastický integrál. Výše zavedený integrál v těchto případech souhlasí s integrálem definovaným po trajektoriích skoro jistě. V limitním případě ze složeného Poisssonova procesu jsme však schopni obdržet jakýkoli proces s nezávislými homogenními přírůtky splňující níže uvedené kvalitativní vlastnosti, které zahrnují i případ Wienerova procesu.

O procesu L_t startujícím z $L_0 = 0$ se zprava spojitými trajektoriemi řekneme, že je to ***Lévyho proces***, pokud má nezávislé přírůstky a homogení ve smyslu $L_{t+h} - L_t \sim L_h$ kdykoli $h, t \ge 0$.

Cvičení Ukažte, že centrovaný Léviho proces s konečným rozptylem $\sigma^2 = \mathrm{var}(L_1)$ je jednoduchý $\mathcal{F}_t$-martingal normovaný na hodnotu σ^2.

Poznámka: Lévyho proces je obecně ve tvaru, který se dá vyjádřit jako součet tří nezávislých složek. První složkou je lineární trend, druhý je až na multiplikativní konstatnu Wienerův proces a třetí je čistě skokový proces, který je limitou složených Poissonových procesů a právě tato třetí část je příkladem skokového procesu, který nemusí mít konečnou variaci, a pro který tak má smysl zavádět stochastický integrál ne po trajektoriích, ale lze to udělat na základě $\mathbb{L}_2$-izometrie, je-li tento proces $\mathbb{L}_2$-integrovatelný. Je zřejmé, že nekonečné variace může skokový proces dosáhnout pouze za cenu nekonečného počtu skoků na konečném intervalu. Aproximující složené Poissonovy procesy tak musí mít čím dál tím větší intenzitu.

9. Itôovy procesy, Itôova formule

(1) rozšíření definice stochastického integrálu pomocí zastavování
(2) kvadratické variace Wienerova procesu
(3) kvadratická variace Itoova lokálního martingalu, indetifikace $\mathbb{L}_2$-martingalu
(4) Stochastické Per Partés, Itoova formule (stačí v jednorozměrném případě pro C^2-funkce)
(5) Ornstein Uhlembeckův proces, Geometrický Brownův pohyb, Brownův most
(6) stochastické diferenciální rovnice (jednoznačnost stochastické exponenciály a OU procesu)
(7) Black Scholes fromule a odpovídající δ-hedging pro Evropskou call opci