cvičení z Náhodných procesů 1 (NMSA334)

9. obecný proces množení a zániku, systémy hromadné obsluhy

Obecný proces množení a zániku je homogenní Markovův řetězec se spojitým časem, množinou stavů $S = \mathbb{N}_0$ a maticí intenzit tvaru

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \lambda_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

kde $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty} \subseteq (0,\infty)^{\mathbb{N}_0}$, $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq (0,\infty)^{\mathbb{N}}$. Vnořený řetězec je nerozložitelný a všechny stavy má trvalé právě tehdy, když $\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{k}\frac{\mu_i}{\lambda_i} = \infty$. Za této podmínky pak existuje netriviální invariantní míra $\eta \in (0,\infty)^{\mathbb{N}_0}$ a to tvaru

$$\boxed{\eta_k = \eta_0 \prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}, \quad k \in \mathbb{N}_0}.$$

Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} < \infty$, potom lze invariantní míru znormovat na stacionární rozdělení, které je zároveň limitním rozdělením.

Do tohoto modelu spadá systém hromadné obsluhy (M/M/c) pro $c \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ s nekonečnou frontou odpovídající volbě

$$\lambda_i = \lambda, \quad \mu_i = \mu \min\{c, i\} \quad \text{pro } \lambda, \mu \in (0,\infty).$$

Zde jsou stavy trvalé právě tehdy, když $\lambda \le c\mu$, a v tom případě je invariantní míra tvaru

$$\eta_k = \eta_0 \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, \quad k \le c, \qquad \eta_k = \eta_c \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{k-c}, \quad k \ge c.$$

Stacionární (limitní) rozdělení pak existuje právě tehdy, když $\lambda < c\mu$.

Analogicky bychom pro konečnou množinu stavů $S = \{0,\dots,n\}$ mohli uvažovat proces s maticí intenzit

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda_{n-3} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -(\lambda_{n-2}+\mu_{n-2}) & \lambda_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_{n-1} & -(\lambda_{n-1}+\mu_{n-1}) & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_n & -\mu_n \end{pmatrix},$$

kde $(\lambda_i)_{i=0}^{n-1}, (\mu_i)_{i=1}^{m} \in (0,\infty)^n$. Stacionární rozdělení π zde existuje a splňuje

$$\boxed{\pi_k = \pi_0 \prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}, \quad k \in \{0,1,\dots,n\}}.$$