cvičení z Náhodných procesů 1 (NMSA334)

4. konečné homogenní markovské řetězce - klasifikace stavů, stacionární rozdělení, absorpce

Buď $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ homogenní markovský řetězec se spočetnou množinou stavů $S = S_0$ a maticí přechodu $\mathbf{P}$. Stav $j \in S$ je ***dosažitelný*** ze stavu $i \in S$ (píšeme $\boldsymbol{i \rightsquigarrow j}$), pokud existuje $n \in \mathbb{N}_0$ takové, že $p_{ij}^{(n)} > 0$. Vektor $\pi \in [0,1]^S$ nazveme ***stacionárním rozdělením*** řetězce $(X_n)_{n=0}^{\infty}$, pokud

$$\boxed{\pi^{\mathsf{T}} = \pi^{\mathsf{T}}\mathbf{P}}, \qquad \pi^{\mathsf{T}} 1_S = 1.$$

Jsou-li všechny stavy vzájemně dosažitelné, řetězec je ***nerozložitelný***, v opačném případě ***rozložitelný***. Množinu přechodných (transientních) stavů značíme $\boldsymbol{T}$ a trvalých stavů $\boldsymbol{C}$.

Poznámka. (a) Pokud stavy $i, j \in S$ jsou vzájemně dosažitelné, tj. $i \rightsquigarrow j \rightsquigarrow i$, pak jsou stejného typu.
(b) V konečném řetězci nejsou žádné stavy trvalé nulové a není možné, aby všechny stavy byly přechodné.
(c) Pokud $i \rightsquigarrow j \not\rightsquigarrow i$, pak stav i je přechodný.
(d) V konečném řetězci vždy existuje stacionární rozdělení a je jednoznačné právě tehdy, když jsou všechny trvalé stavy vzájemně dosažitelné. Je-li π stacionární rozdělení a $i \in S$ je přechodný stav, pak $\pi_i = 0$.[1]

Poznámka. Řetězec je rozložitelný právě tehdy, když je matice přechodu následujícího tvaru (rozložitelná)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{R} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{P}^* \in \mathbb{R}^{C \times C}$ je (stochastická) matice přechodu podřetězce tvořeného všemi trvalými stavy, $\mathbf{0} = 0_{C \times S} \in \{0\}^{C \times S}$ je nulová matice (zamezující přechodům z trvalých stavů do přechodných), $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{T \times T}$ je matice přechodu mezi přechodnými stavy (není stochastická) a $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{T \times C}$ je matice tvořená přechodovými pravděpodobnostmi z přechodných stavů do trvalých.

Pro $i \in T, j \in C$ uvažujeme ***pravděpodobnosti absorpce*** $\boldsymbol{u_{ij}} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}_i(\cup_n [X_1 \in T, \ldots X_{n-1} \in T, X_n = j])$ popisující pravděpodobnost, že řetězec startující ze stavu $i \in T$ ze všech trvalých stavů poprvé vstoupí právě do stavu $j \in C$. Matici absorpce $\boldsymbol{U = (u_{ij})_{i \in T, j \in C}}$ pak můžeme při započtení všech scénářů vyjádřit pomocí následujícího vzorce

$$\boxed{\mathbf{U} = (\mathbb{1}_T - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{Q}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{R}^n \mathbf{Q}.$$

Matice $\mathbf{R}^n$ zde značí (nestochastickou) matici přechodu mezi přechodnými stavy po n-krocích a součin $\mathbf{R}^n\mathbf{Q}$ pak představuje pravděpodobnosti přechodu z přechodných stavů do trvalých po $n+1$ krocích příslušných jevu, že k první návštěvě množiny trvalých stavů dochází právě v čase $n+1$.

Příklady

1. (model výměny tepla) Uvažujme dvě urny, ve kterých je celkem k koulí očíslovaných $1, 2, \ldots, k$. V každém kroku se náhodně zvolí jedno číslo mezi $1, 2, \ldots, k$ a koule s daným číslem se přemístí do druhé urny. Počet koulí v urně reprezentuje teplotu tělesa a přemístění koule výměnu tepla. Označme X_n teplotu prvního tělesa (tj. počet koulí v první urně) v čase n. Ukažte, že $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ tvoří homogenní Markovův řetězec, najděte matici pravděpodobností přechodu. Spočtěte stacionární rozdělení.

2. (model mísení dvou nestlačitelných kapalin) Mějme dvě urny, každá z nich obsahuje k koulí. Celkem máme $2k$ koulí, z toho k bílých a k černých. V každém časovém okamžiku probíhá proces mísení takto: v každé z uren náhodně zvolíme jednu kouli a přemístíme ji do opačné urny (výměna probíhá současně). Náhodná veličina X_n udává počet bílých koulí v první urně v čase n. Ukažte, že posloupnost $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ je homogenní Markovův řetězec, najděte matici pravděpodobností přechodu.

[1] Tuto implikaci lze obrátit, pokud v uvažovaném konečném řetězci jsou všechny trvalé stavy vzájemně dosažitelné.

3. Mějme tři přihrádky, do kterých umísťujeme kuličky (každá přihrádka může obsahovat maximálně jednu kuličku). V každém časovém okamžiku vybereme rovnoměrně náhodně jednu z přihrádek. Pokud není obsazena, vložíme do ní kuličku. Pokud je obsazena, s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ z ní kuličku odebereme a s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ kuličku ponecháme. Označme X_n počet obsazených přihrádek v čase n. Určete matici pravděpodobností přechodu Markovova řetězce $(X_n)_{n=0}^{\infty}$. Klasifikujte stavy řetězce a spočtěte stacionární rozdělení (pokud existuje). Předpokládejte, že počáteční rozdělení je rovnoměrné (každý stav má stejnou pravděpodobnost) a spočtěte absolutní pravděpodobnosti po jednom kroku.

4. Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

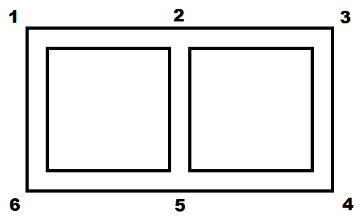
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p & 0 & 1-p & 0 \\ 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & p \\ 0 & p & 0 & 1-p \end{pmatrix},$$

kde $p \in (0,1)$. Spočtěte stacionární rozdělení.

5. Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Uvažujme objekt, který se pohybuje po plánu znázorněném na obrázku. Pohyby jsou pouze mezi šesti vyznačenými body. V každém kroku si objekt vybere jeden ze čtyř směrů (sever, východ, jih, západ – každý se stejnou pravděpodobností) a tímto směrem se vydá. Určeným směrem se pohybuje tak dlouho, dokud je to možné (pokud v daném směru nevede cesta, zůstává na místě). Označme X_n polohu částice po n krocích. Určete matici pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$ Markovova řetězce $(X_n)_{n=0}^{\infty}$. Klasifikujte stavy řetězce a určete matici U pravděpodobností absorpce do trvalých stavů. Spočtěte stacionární rozdělení.



7. Klasifikujte stavy a spočtěte stacionární rozdělení Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Mějme urnu a 5 koulí. V každém kroku budeme koule z urny odebírat nebo do urny přidávat podle následujícího schématu. Pokud je urna prázdná, naplníme ji všemi pěti koulemi. V opačném případě z urny odebereme s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ čtyři koule, s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ dvě koule a s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ žádnou kouli. Pokud bychom měli odebrat více koulí než se právě v urně nachází, tak odebereme všechny koule, které v urně jsou. Nechť X značí počet koulí v urně po n krocích. Určete matici pravděpodobností přechodu Markovova řetězce $(X_n)_{n=0}^{\infty}$. Klasifikujte stavy řetězce a spočtěte stacionární rozdělení (pokud existuje). Určete matici pravděpodobností absorpce do trvalých stavů. Předpokládejte, že počáteční rozdělení je rovnoměrné (každý stav má stejnou pravděpodobnost) a spočtěte absolutní pravděpodobnosti po prvním kroku.