cvičení z Náhodných procesů 1 (NMSA334)

3. matice přechodu, Perronův vzorec, klasifikace stavů na základě chování $\mathbf{P}^n$

Buď $X = (X_n)_{n=0}^\infty$ homogenní Markovův řetězec se stavy v $(S, \mathcal{S})$, kde $\mathcal{S} = 2^S$ je množina všech podmnožin množiny S. Pro $i \in S$ pak existuje pravděpodobnostní míra P_i na $(S, \mathcal{S})^{\otimes \mathbb{N}_0}$ taková,[1] že

$$\mathsf{P}_i(A)\mathbb{P}(X_k = i) = \mathbb{P}(X^{[k]} \in A, X_k = i), \quad A \in \mathcal{S}^{\otimes \mathbb{N}_0}, k \in \mathbb{N}_0, \quad \text{kde } X^{[k]} \stackrel{\text{def}}{=} (X_{n+k})_{n=0}^\infty. \tag{1}$$

Hodnotu $\mathsf{P}_i(A)$ budeme o něco intuitivněji (a o něco méně přesněji) značit symbolem $\boldsymbol{\mathbb{P}_i(X \in A)}$ a budeme ji interpretovat jako podmíněnou pravděpodobnost jevu $[X \in A]$ za podmínky, že nastane jev $[X_0 = i]$.

Jev $i \in S$ označíme jako ***přechodný***, pokud $\mathbb{P}_i(\forall n \in \mathbb{N}\ X_n \neq i) > 0$, tedy pokud se s kladnou pravděpodobností řetězec do tohoto stavu nevrátí, pokud z něj vystartuje v čase 0. V opačném případě, tedy pokud se řetězec do počátečního stavu i skoro jistě vrátí, formálně $\mathbb{P}_i(\exists n \in \mathbb{N}\ X_n = i) = 1$, pak řekneme, že stav i je ***trvalý***.

Označíme-li $\boldsymbol{\tau_i(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{n \in \mathbb{N}; X_n = i\}$ *dobu první návštěvy* stavu i, pak trvalý stav $i \in S$ nazveme ***nulový***, pokud *střední doba návratu* do stavu i je nekonečná, tj.

$$\infty = \mathsf{E}_i \tau_i(1) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}_i(\tau_i(1) > n) = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}_i(X_k \neq i, k = 1, \dots n).$$

V opačném případě, tj. pokud $\mathsf{E}_i \tau_i(1) < \infty$, trvalý stav $i \in S$ nazveme ***nenulový***.

Buď $\mathbf{P}$ matice přechodu řetězce $(X_n)_{n=0}^\infty$ a označme $(p_{ij}^{(n)})_{i,j \in S} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}^n$ prvky n-té mocniny reprezentující hodnoty

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_i(X_n = j).$$

Pokud $i \in S$ je takový, že $D_i \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{N}; p_{ii}^{(n)} > 0\} \neq \emptyset$, pak definujeme $\boldsymbol{d_i} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{NSD}(D_i)$, a pokud $d_i > 1$ pak stav i nazveme ***periodický*** s periodou d_i; ***neperiodický***, pokud $d_i = 1$. Dále platí

(1) stav $i \in S$ je trvalý právě tehdy, když $\sum_{n=1}^\infty p_{ii}^{(n)} = \infty$,

(2) trvalý stav $i \in S$ je nulový právě tehdy, když $p_{ii}^{(n)} \to 0$ pro $n \to \infty$.

Věta. (Perronův vzorec) Nechť $n, k \in \mathbb{N}, \Bbbk \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, k\}$. Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ má charakteristický polynom

$$\det(\lambda \mathbb{1}_n - A) = \prod_{j \in \Bbbk} (\lambda - \lambda_j)^{m_j},$$

kde $\mathbb{1}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{diag}(1_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je jednotková matice. Pak

$$\boxed{A^n = \sum_{j \in \Bbbk} \frac{1}{(m_j - 1)!} \frac{\mathrm{d}^{m_j - 1}}{\mathrm{d}\lambda^{m_j - 1}} \left[\frac{\mathrm{adj}(\lambda \mathbb{1}_n - A)}{\psi_j(\lambda)} \lambda^n \right] \bigg|_{\lambda = \lambda_j},} \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

kde $\psi_j(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i \in \Bbbk \setminus \{j\}} (\lambda - \lambda_i)^{m_i} = \frac{\det(\lambda \mathbb{1}_n - A)}{(\lambda - \lambda_j)^{m_j}}$.

Poznámka. Je-li funkce f reálné proměnné diferencovatelná v bodě λ_0, pak platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}[f(\lambda)(\lambda - \lambda_0)]|_{\lambda = \lambda_0} = f'(\lambda_0)(\lambda_0 - \lambda_0) + f(\lambda_0) = f(\lambda_0).$$

Tvrzení. Nechť $(X_n, Y_n)_{n=0}^\infty$ je Markovův řetězec se spočtenou množinou stavů $S_1 \times S_2$ a nechť

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, Y_n = y_n)$$

nezávisí na hodnotě $y_n \in S_2$ kdykoli $x_n, x_{n+1} \in S_1$ a $n \in \mathbb{N}_0$. Pak $(X_n)_{n=0}^\infty$ je Markovův řetězec s množinou stavů S_1.

[1] Pro $A = \{(i_0, \dots, i_n)\} \times S^{\mathbb{N}_0}$ stačí položit $\mathsf{P}_i(A) \stackrel{\text{def}}{=} 1_{[i = i_0]} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n}$, kde p_{ij} je přechodová pravděpodobnost ze stavu i do stavu j, a následně rozšířit P_i na pravděpodobnostní míru na $\mathcal{S}^{\otimes \mathbb{N}_0}$. Pokud $i \in S_0$, pak je míra P_i jednoznačná.

Poznámka. (i) Markovská podmínka (7) z minulé hodiny je splněna právě tehdy, když platí

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = j_{n-1}, \dots, X_0 = j_0), \qquad (2)$$

kdykoli jevy v podmínkách na obou stranách mají kladnou pravděpodobnost.[2]

(ii) Náhodná posloupnost $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ nabývající hodnot ve spočetné množině S je markovským řetězcem právě tehdy, když

$$\mathbb{P}_{X_0,\dots,X_{n-1},X_{n+1},\dots X_m | X_n} = \mathbb{P}_{X_0,\dots,X_{n-1}|X_n} \otimes \mathbb{P}_{X_{n+1},\dots X_m | X_n},$$

kdykoli $1 \leq n \leq m$, tedy pokud *minulost a budoucnost procesu jsou podmíněně nezávislé*, když podmiňujeme *současností* procesu.

Příklady

1. Nechť $(Y_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s diskrétním rovnoměrným rozdělením na množině $\{-1, 0, 1\}$. Uvažujme posloupnost $Z_n \overset{\text{def}}{=} \max\{Y_1, \dots, Y_n\}, n \in \mathbb{N}_0$. Ukažte, že se jedná o homogenní Markovův řetězec. Určete matice pravděpodobností přechodu všech řádů. Klasifikujte stavy řetězce $(Z_n)_{n=0}^{\infty}$.

2. Nechť $(Y_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s diskrétním rovnoměrným rozdělením na množině $\{-1, 0, 1\}$. Uvažujme posloupnost $X_n \overset{\text{def}}{=} Y_n + Y_{n+1}, n \in \mathbb{N}_0$. Ukažte, že posloupnost $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ není markovský řetězec.

   Návod: ukažte, že neplatí vzorec (2)*. Uvažujte trajektorie* $(2, 0, 2), (-2, 0, 2)$ *posloupnosti* (X_0, X_1, X_2).

3. Mějme neomezenou zásobu kuliček a k přihrádek. V každém kroku jednu kuličku náhodně vložíme do jedné z přihrádek. Nechť X_n označuje počet obsazených přihrádek v čase n. Ukažte, že $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ je homogenní Markovův řetězec, určete matici pravděpodobností přechodu a klasifikujte stavy řetězce.

4. Je dán Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

   tj. jde o náhodnou procházku na trojúhelníku. Spočtěte $\mathbf{P}^n, n \in \mathbb{N}_0$. Klasifikujte stavy řetězce.

5. Uvažujme Markovův řetězec s množinou stavů $S = \{0, 1\}$ a maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix},$$

   kde $a, b \in (0, 1)$. Spočtěte $\mathbf{P}^n$. Určete rozdělení časů prvního návratu do stavů 0 a 1. Pomocí obdržených výsledků klasifikujte stavy řetězce.

6. Mějme dvě urny , každá z nich obsahuje k koulí. Celkem máme $2k$ koulí, z toho k bílých a k černých. V každém časovém okamžiku probíhá proces mísení takto: v každé z uren náhodně zvolíme jednu kouli a přemístíme ji do opačné urny (výměna probíhá současně). Náhodná veličina X_n udává počet bílých koulí v první urně v čase n. Ukažte, že posloupnost $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ je homogenní Markovův řetězec, najděte matici pravděpodobností přechodu.

7. (model výměny tepla) Uvažujme dvě urny, ve kterých je celkem k koulí očíslovaných $1, 2, \dots, k$. V každém kroku se náhodně zvolí jedno číslo mezi $1, 2, \dots, k$ a koule s daným číslem se přemístí do druhé urny. Počet koulí v urně reprezentuje teplotu tělesa a přemístění koule výměnu tepla. Označme X_n teplotu prvního tělesa (tj. počet koulí v první urně) v čase n. Ukažte, že $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ tvoří homogenní Markovův řetězec, najděte matici pravděpodobností přechodu.

[2] Důkaz takového tvrzení by se opíral o velice jednoduché, ale důležité lemma říkající, že pokud A, B jsou jevy a X diskrétní náhodná veličina taková, že $\mathbb{P}(A|B, X = i)$ nezávisí na hodnotě i, pak tato společná hodnota je rovna $\mathbb{P}(A|B)$. Formálněji: existuje-li $p \in [0, 1]$ takové, že $(\forall i)$ $\mathbb{P}(A \cap B \cap [X = i]) = p\,\mathbb{P}(B \cap [X = i])$, pak také $\mathbb{P}(A \cap B) = p\,\mathbb{P}(B)$.