cvičení z Náhodných procesů 1 (NMSA334)

2. náhodný součet náhodných veličin, proces větvení

Věta. Nechť $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených čítacích náhodných veličin, která je nezávislá s čítací veličinou N. Pak veličina $S_N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{N} X_k$ je čítací a pro každé $s \geq 0$ platí

$$\boxed{\mathbb{E}s^{S_N} = \mathbb{E}(\mathbb{E}s^{X_1})^N}. \tag{1}$$

Rovnost (1) platí i pro taková $s \in \mathbb{C}$, pro která $\mathbb{E}|s|^{S_N} < \infty$, a pro ně lze tuto rovnost zapsat v řeči vytvořujících funkcí v následujícím tvaru

$$\boxed{P_{S_N}(s) = P_N(P_{X_1}(s))}. \tag{2}$$

Střední hodnotu a rozptyl veličiny S_N je pak možné spočítat např. z následujících vzorců

$$\boxed{\mathbb{E}S_N = \mathbb{E}N \cdot \mathbb{E}X_1, \qquad \text{var}(S_N) = \mathbb{E}N \cdot \text{var}(X_1) + \text{var}(N) \cdot (\mathbb{E}X_1)^2}. \tag{3}$$

Poznámka. V kontextu výše uvedené věty platí

$$\mathbb{P}(S_N = k) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n)\, \mathbb{P}(S_N = k | N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n)\, \mathbb{P}(S_n = k), \quad \text{kde} \quad S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

Značení. Nechť $\mathsf{P}, \mathsf{Q}, \mathsf{R}$ jsou pravděpodobnostní míry soustředěné na množině $\mathbb{N}_0$ po řadě s vahami $p, q, r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$. Píšeme $\mathbf{R = P^{*Q}}$, pokud platí následující rovnosti

$$r_k = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} q_n\, p_k^{n*}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

kde p_k^{n*} označuje k-tý prvek posloupnosti p^{n*} představující n-tou konvoluční mocninu posloupnosti $p \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$.

Galtonovým-Watsonovým procesem větvení *odpovídající pravděpodobnostím vahám* $(p_k)_{k=0}^{\infty}$ *generující rozdělení* P rozumíme posloupnost čítacích náhodných veličin $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ takových, že

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = p_j^{i*}} \tag{5}$$

platí, kdykoliv $i_0, \ldots i_{n-1}, i, j, n \in \mathbb{N}_0$ jsou taková, že má jev v podmínce kladnou pravděpodobnost.

Interpretace. Počáteční čítací veličina X_0 má volitelné rozdělení $\mathsf{P}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}_{X_0}$ a interpretujeme ji jako počet jedinců nulté generace (pra-matek). Podobně pro každé $n \in \mathbb{N}$ zde $\mathsf{P}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}_{X_n} = \mathsf{P}^{*\mathsf{P}_{n-1}}$ představuje rozdělení náhodné veličiny X_n udávající počet jedinců v n-té generaci, přičemž předpokládáme, že každý jedinec v určité generaci dá vznik náhodnému počtu potomků a sice počtu s pravděpodobnostním rozdělením P, který nezávisí na počtu potomků ostatních jedinců téže generace a také jedinců předcházejících generací. Formálně lze veličiny $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ reprezentovat pomocí schématu nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin $(U_{n,j})_{n,j=0}^{\infty}$ s rozdělením P, udávající vždy počet potomků j-tého jedince v n-té generaci, a to následujícím způsobem

$$X_1 = \textstyle\sum_{j=1}^{X_0} U_{0,j}, \quad X_2 = \sum_{j=1}^{X_1} U_{1,j}, \quad \ldots \quad X_n = \sum_{j=1}^{X_{n-1}} U_{n-1,j}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Poznámka. Ze vzorců (2,5) dostáváme následující rovnost pro vytvořující funkce

$$P_{X_n}(s) = P_{X_{n-1}}(P(s)) \quad \text{pro} \quad |s| \leq 1, \quad \text{kde} \quad P(s) \stackrel{\text{def}}{=} \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n, \; p_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{P}(\{n\}).$$

Věta. Buď $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ Galtonův proces větvení startující z $X_0 = 1$. Označme $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}X_1$ a $\sigma^2 \stackrel{\text{def}}{=} \text{var}(X_1)$. Pak

$$\boxed{\mathbb{E}X_n = \mu^n, \quad \text{var}(X_n) = \sigma^2 \mu^{n-1}(1 + \mu + \ldots + \mu^{n-1})}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{6}$$

Dále nechť $p_0 \in (0, 1)$. Pokud $\mu \leq 1$, pak populace dříve či později vymře s pravděpodobností 1, tedy

$$\xi \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\cup_n [X_n = 0]) = 1.$$

Pokud $\mu > 1$, pak pravděpodobnost vymření ξ je jediným kořenem rovnice $s = P(s)$ na intervalu $(0, 1)$.

Posloupnost náhodných veličin $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ s hodnotami ve spočetné množině S nazveme ***markovským řetězcem*** *s diskrétní množinou stavů a diskrétním časem*, pokud splňuje tzv. ***markovskou podmínku***

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) \tag{7}$$

kdykoli je levá strana dobře definována, tj. pokud má jev v podmínce na levé straně kladnou pravděpodobnost, a to vše pro všechna $j, i, \in S$ a $(i_0, \ldots, i_{k-1})^\intercal \in S^k$.

Poznámka. Je-li $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ markovský řetězec se spočetnou množinou stavů S, pak pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ existuje stochastická ***matice přechodu*** $\mathbf{P}^{(n,m)} = \left(p_{ij}^{(n,m)}\right)_{i,j \in S}$ *z času n do času $m > n$* taková,[1] že

$$\mathbb{P}(X_m = j, X_n = i) = \mathbb{P}(X_n = i) p_{ij}^{(n,m)}, \quad i, j \in S,$$

stochastická matice je čtvercová matice $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in S} \in [0,1]^{S \times S}$ taková, že $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1, i \in S$. Je-li P stochastická matice a $f \in l_\infty(S), \pi \in l_1(S)$,[2] pak jsou dobře definovány součiny

$$\mathbf{P}f = \left(\textstyle\sum_{j \in S} p_{ij} f_j\right)_{i \in S}, \qquad \pi^\intercal \mathbf{P} = \left(\textstyle\sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}\right)_{j \in S}^\intercal.$$

Obě tato násobení lze využít k tomu, abychom si uvědomili, ze mezi stochastickými maticemi $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in S}, \mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in S}$ je dobře definován jejich součin

$$\mathbf{PQ} = \left(\textstyle\sum_{j \in S} p_{ij} q_{jk}\right)_{i,k \in S}.$$

Tvrzení. Je-li $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ markovský řetězec se spočetnou množinou stavů S a s maticemi přechodu $\mathbf{P}^{(n,n+1)}$, $n \in \mathbb{N}_0$ o jeden krok dopředu pak následující předpis pro $0 \le n < m < \infty$ definuje matici přechodu z času n do času m

$$\mathbf{P}^{(n,m)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}^{(n,n+1)} \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}^{(m-1,m)} = \textstyle\prod_{j=n}^{m-1} \mathbf{P}^{(j,j+1)}. \tag{8}$$

přičemž pro vektor pravděpodobností $\mathbf{p}^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{P}(X_n = i))_{i \in S}$ platí $\mathbf{p}^{(m)\intercal} = \mathbf{p}^{(n)\intercal} \mathbf{P}^{(n,m)}$.

Pokud existuje stochastická matice $\mathbf{P}$, která je maticí přechodu markovského řetězce $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ z času n do času $n+1$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$, pak řekneme, že $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ je ***homogenní Markovův řetězec*** *s maticí přechodu* $\mathbf{P}$.[3] Pak $\mathbf{P}^n$ je matice přechodu z času m do času $m+n$ kdykoli $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Příklady.

1. Uvažujte náhodnou veličinu N s geometrickým rozdělením s parametrem $p = q = 1/2$ nezávislou s posloupností $(X_j)_{j=1}^{\infty}$ nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s Poissonovým rozdělením se střední hodnotou 1. Spočtěte vytvořující funkci, střední hodnotu a rozptyl náhodného součtu náhodných veličin $S_N = \sum_{j=1}^{n} X_j$.

2. Ukažte, že platí rovnosti (6).

3. Uvažujme model větvení s $p_0 = 1/5, p_1 = 1/5, p_2 = 3/5$ a $p_k = 0$ pro $k \ge 3$. Určete střední hodnotu a rozptyl počtu jedinců v n-té generaci. Spočtěte pravděpodobnost vymření populace. Určete rozdělení počtu jedinců ve druhé generaci.

4. Ověřte, že Galtonův-Watsonův proces větvení je homogenní Markovův řetězec. Jak vypadají pravděpodobnosti přechodu? Vyjádřete pravděpodobnosti přechodu ze stavů 0, 1 a 2 pro případ z příkladu 3.

---

[1] Pokud existuje $i \in S$ takové, že $P(X_n = i) = 0$, pak matice $\mathbf{P}^{(n,m)}$ není určena jednoznačně. V tomto případě je vhodné uvažovat takové verze $(\mathbf{P}^{(n,m)})_{m=n+1}^{\infty}$, které splňují rovnost (8).

[2] $l_1(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathbb{R}^S; \sum_{i \in S} |f_i| < \infty\}$ a $l_\infty(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathbb{R}^S; \sup_{i \in S} |f_i| < \infty\}$.

[3] Matice přechodu homogenního Markovova řetězce je určena jednoznačně právě tehdy, když

$$S = S_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in S; \exists\, n \in \mathbb{N}_0 \;\; P(X_n = i) > 0\}.$$