cvičení z Náhodných procesů 1 (NMSA334)

1. vytvořující funkce celočíselných nezáporných (čítacích) náhodných veličin

Vytvořující funkcí posloupnosti reálných čísel $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ rozumíme funkci

$$\boxed{A(s) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n \in \mathbb{C}} \tag{1}$$

s definičním oborem ***dom(A)*** tvořeným takovými $s \in \mathbb{C}$, pro které výše uvedená limita konverguje.

Tvrzení. Pro vytvořující funkci A z (1) existuje ***poloměr konvergence*** $R = R_A \in [0, \infty]$ splňující
(i) $\{s \in \mathbb{C} : |s| < R\} \subseteq \operatorname{dom}(A) \subseteq \{s \in \mathbb{C} : |s| \le R\}$,
(ii) a lze jej získat z ***Cauchyova-Hadamardova vzorce***

$$R = \liminf_{n\to\infty} |a_n|^{-1/n} = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}, \quad \text{kde} \quad 1/0 \stackrel{\text{def}}{=} \infty. \tag{2}$$

(iii) Pro $|s| < R$ řada na pravé straně (1) konverguje absolutně, lokálně stejnoměrně a platí

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} a_n s^n, \quad k \in \mathbb{N},\ |s| < R, \tag{3}$$

přičemž ***formálně zderivovaná řada*** má tentýž poloměr konvergence R. Speciálně pro $R > 0$ lze koeficienty řady jednoznačně určit např. ze vzorce

$$a_n = \tfrac{1}{n!} A^{(n)}(0), \quad \text{kde} \quad A^{(n)}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \tfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} A(s). \tag{4}$$

(iv) ***Abelova věta:*** Jestliže $1 \in \operatorname{dom}(A)$, pak $A(1_-) = A(1)$. Jestliže $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in [0, \infty)^{\mathbb{N}_0}$, pak

$$A(1_-) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \in [0, \infty]. \tag{5}$$

Vytvořující funkcí nezáporně celočíselné (čítací) náhodné veličiny $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ rozumíme mocninnou řadu vytvořenou posloupností $p_n \stackrel{\text{def}}{=} P(X = n), n \in \mathbb{N}_0$ a značíme ji symbolem

$$\boxed{\boldsymbol{P_X(s)} \stackrel{\text{def}}{=} \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n}, \quad \text{přičemž} \quad \boxed{P_X(s) = Es^X} \quad \text{platí pro} \quad |s| < R_X \stackrel{\text{def}}{=} R_{P_X}. \tag{6}$$

Pro $k \in \mathbb{N}$ definujeme k-tou ***faktoriální mocninu*** předpisem

$$x^{[k]} \stackrel{\text{def}}{=} x(x-1)\cdot \ldots (x-k+1) = \textstyle\prod_{j=0}^{k-1} (x - j). \tag{7}$$

Je-li X čítací n.v. pak střední hodnotu $EX^{[k]}$ nazýváme k-tým ***faktoriálním momentem*** n.v. X.

Poznámka. Je-li $x \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}_0$, pak pro kombinační číslo platí $\binom{x}{k} = x^{[k]}/k!$ a zřejmě $k^{[k]} = k!$.

Věta. Pro čítací n.v. $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ a pro $k \in \mathbb{N}_0$ platí $EX^{[k]} = P_X^{(k)}(1_-)$. Speciálně pokud $EX < \infty$, pak

$$\operatorname{var}(X) = E[X(X-1)] + EX(1 - EX) = P_X''(1_-) + P_X'(1_-) - P_X'(1_-)^2. \tag{8}$$

Dále pro vytvořující funkci ***zbytkových pravděpodobností*** $q_n \stackrel{\text{def}}{=} P(X > n) = \sum_{m>n}^{\infty} p_m$ platí

$$\boxed{Q_X(s) \stackrel{\text{def}}{=} \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} q_n s^n = \frac{1-P_X(s)}{1-s}, \quad |s| < 1}, \tag{9}$$

přičemž $EX = Q_X(1_-)$ a $EX^{[2]} = 2Q_X'(1_-)$. Pro $X \in \mathbb{L}_1$ tak $\operatorname{var}(X) = 2Q_X'(1_-) + Q_X(1_-) - Q_X(1_-)^2$.

Konvolucí posloupností $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ rozumíme posloupnost

$$\boldsymbol{a * b} \stackrel{\text{def}}{=\!=} (c_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}, \quad \text{kde} \quad \boxed{c_n \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}, \ n \in \mathbb{N}_0. \tag{10}$$

Pro $k \in \mathbb{N}_0$ definujeme k-tou ***konvoluční mocninu*** $\boldsymbol{a^{k*}}$ předpisem

$$\boldsymbol{a^{0*}} \stackrel{\text{def}}{=\!=} (1_{[n=0]})_{n=0}^{\infty}, \quad \boldsymbol{a^{1*}} \stackrel{\text{def}}{=\!=} a, \quad \boldsymbol{a^{k*}} \stackrel{\text{def}}{=\!=} a * a^{(k-1)*} = a^{(k-1)*} * a, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Poznámka. Jsou-li $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}_0$ nezávislé čítací veličiny s $x_n \stackrel{\text{def}}{=\!=} P(X = n)$ a $y_n \stackrel{\text{def}}{=\!=} P(Y = n)$, pak rozdělení součtu $Z \stackrel{\text{def}}{=\!=} X + Y$ je popsáno pravděpodobnostmi $z_n = P(Z = n), n \in \mathbb{N}_0$ takovými, že

$$z = x * y,$$

přičemž pro vytvořující funkce a pro $|s| < R_X \wedge R_Y$ platí $P_{X+Y}(s) = Es^{X+Y} = Es^X\, Es^Y = P_X(s) P_Y(s)$. Podobně jsou-li $X_j : \Omega \to \mathbb{N}_0, j \leq n$ nezávislé stejně rozdělené a $S = \sum_{j=1}^{n} X_j$, pak $P_S(s) = P_{X_1}(s)^n$.

Věta. Nechť A, B, C jsou po řadě vytvořující funkce posloupností $a, b, c \stackrel{\text{def}}{=\!=} a * b$. Pak

$$C(s) = A(s) B(s) \quad \text{pro } |s| < \min\{R_A, R_B\}. \tag{11}$$

Speciálně, A^k je rovna vytvořující funkci posloupnosti a^{k*} na množině $\{s \in \mathbb{C}; |s| < R_A\}$ kdykoli $k \in \mathbb{N}_0$.

Příklad. Volíme-li $a, b, c \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ po řadě $a_n = 1_{[n=0]} - 1_{[n=1]}, b_n = 1, n \in \mathbb{N}_0$ a $c \stackrel{\text{def}}{=\!=} a * b$. Pak odpovídající vytvořující funkce A, B, C mají poloměry konvergence R_A, R_B, R_C, kde $R_C = \infty > \min\{R_A, R_B\}$.

Příklady

1. Najděte postupně (a) vytvořující funkci (b) střední hodnotu (c) rozptyl náhodné veličiny
   (i) s Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda > 0$,
   (ii) s Geometrickým rozdělením s pravděpodobností zdaru $p = 1 - q \in (0, 1)$.
2. Pro n.v. $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ vyjádřete pomocí funkce P_X hodnoty (i) $P_{X+1}(s)$ (ii) $P_{aX+b}(s)$, kde $a, b \in \mathbb{N}_0$.
3. Nechť $(X_1, \ldots, X_n)^\intercal$ je náhodný výběr z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda > 0$. Spočtěte vytvořující funkci n.v. $S = X_1 + \ldots + X_n$ a určete její rozdělení.
4. Nechť $X_k : \Omega \to \{0, 1\}, k = 1, \ldots, n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny. Spočtěte vytvořující funkci a určete rozdělení náhodné veličiny $S = X_1 + \ldots + X_n$.
5. Nechť $X_k : \Omega \to \mathbb{N}_0, k = 1, \ldots, n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s geometrickým rozdělením s parametrem p. Spočtěte vytvořující funkci a určete rozdělení náhodné veličiny $S = X_1 + \ldots + X_n$.
6. Mějme n bernoulliovských pokusů. Najděte pravděpodobnosti, že počet zdarů bude sudý.
7. Mějme n bernoulliovských pokusů. Najděte pravděpodobnosti, že dvojice $(zdar, nezdar)$ nastane poprvé v pokusech $(n, n + 1)$.
8. Najděte příklad čítací náhodné veličiny, jejíž vytvořující funkce má poloměr konvergence roven jedné.