Stochastické modely pro finance a pojišťovnictví NMFM505 – cvičení 1

Předpokládáme, že je dána stochastická báze $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$.

1. Adaptovanost a markovský čas

- Reálný (náhodný) proces $(X_t)_{t\geq 0}$ je ***adaptovaný vzhledem k filtraci*** $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, pokud $X_t \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_t)$ [tj. $\sigma(X_t) \subseteq \mathcal{F}_t$] pro každé $t \in [0,\infty)$. Soukromě zkráceně píšeme $(X_t) \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$.
- Zobrazení $\tau : \Omega \to [0,\infty]$ je ***markovský čas vzhledem k filtraci*** $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, pokud $[\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t$ platí pro každé $t \in [0,\infty)$. Soukromě zkráceně píšeme $\tau \in \text{MČ}(\mathcal{F}_t)$.

Příklad 1. Buď $(X_t)_{t\geq 0}$ spojitý $(\mathcal{F}_t)$-adaptovaný proces. Ukažte, že potom

(1) $X_t^* \triangleq \max_{s\leq t} X_s, t \geq 0$ je také spojitý $(\mathcal{F}_t)$-adaptovaný proces,

(2) $\tau_c \triangleq \inf\{t \geq 0; X_t \geq c\}$ je markovský čas vzhledem k $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ kdykoli $c \in \mathbb{R}$,

(3) $\rho_c \triangleq \inf\{t \geq 0; X_t > c\}$ je markovský čas vzhledem k $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$ kdykoli $c \in \mathbb{R}$, kde

$$\mathcal{F}_{t+} \triangleq \cap_{r\in(t,\infty)}\mathcal{F}_r.$$

Návod: Splňuje-li $\rho : \Omega \to [0,\infty]$ *podmínku* $\forall\ t \in [0,\infty)\quad [\rho < t] \in \mathcal{F}_t$, *pak* $\rho \in \text{MČ}(\mathcal{F}_{t+})$.

(4) Ukažte, že obecně ρ_c nemusí být markovský čas vzhledem k $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

2. Markovský čas a martingal

- Integrovatelný $(\mathcal{F}_t)$-adaptovaný proces $(M_t)_{t\geq 0}$ je podle definice **$(\mathcal{F}_t)$-martingal** právě tehdy, když $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] \overset{\text{sj}}{=} M_s$ kdykoli $0 \leq s \leq t < \infty$.

Příklad 2.

(1) Buď $(M_t)_{t\geq 0}$ $(\mathcal{F}_t)$-martingal a $\text{MČ}(\mathcal{F}_t) \ni \tau : \Omega \to \{s, r\}$. Ukažte, že pak $\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}X_s = \mathbb{E}X_r$.

(2) Buď $(M_t)_{t\geq 0}$ integrovatelný $(\mathcal{F}_t)$-adaptovaný proces. Nechť

$$\forall\ 0 \leq s < r < \infty \quad \forall\ \text{MČ}(\mathcal{F}_t) \ni \tau : \Omega \to \{s, r\} \quad \mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}X_s = \mathbb{E}X_r.$$

Ukažte, že potom $(M_t)_{t\geq 0}$ je $(\mathcal{F}_t)$-martingal.

(3) Buď $(M_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{M}_2^c$ a $X \in \mathcal{L}_T^0$, kde $T \in (0,\infty)$. Ukažte, že pak platí[1]

$$\mathbb{E}[I_T(X)|\mathcal{F}_t] \overset{\text{sj}}{=} I_t(X), \quad t \in [0,T]$$

a že totéž platí, pokud $I_t(X)_{0\leq t\leq T}$ nahradíme procesem $Y_t \triangleq I_t(M)^2 - \int_0^t X_s^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s, t \in [0,T]$.

3. Wienerův proces

- Proces $(W_t)_{t\geq 0}$ je ***n-rozměrný*** $(\mathcal{F}_t)$***-Wienerův proces*** nebo také $(\mathcal{F}_t)$***-Wienerův proces s hodnotami v*** $\mathbb{R}^n$, pokud
  (1) má spojité trajektorie a startuje z $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ v čase 0 [tj. $W_0 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$],
  (2) $(W_t)_{t\geq 0} \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)^n$ a $N_n(\mathbf{0}, (t-s)\mathbf{I}) \sim W_t - W_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$ kdykoli $0 \leq s < t < \infty$.

  Je-li $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s; s \leq t)$ pro každé $t \in [0,\infty)$, pak odkaz na filtraci vypouštíme stejně jako odkaz na n, pokud $n = 1$.

Příklad 3. Buď $(W_t, V_t)_{t\geq 0}^\intercal$ dvourozměrný $(\mathcal{F}_t)$-Wienerův proces. Ukažte, že potom

(1) procesy $(W_t)_{t\geq 0}$ a $(V_t)_{t\geq 0}$ jsou nezávislé,

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}}(W_t + V_t, W_t - V_t)_{t\geq 0}^\intercal$ je dvourozměrný $(\mathcal{F}_t)$-Wienerův proces,

(3) $(W_t^2 - t)_{t\geq 0}$ je $(\mathcal{F}_t)$-martingal, a tedy $\langle W\rangle_t \overset{\text{sj}}{=} t, t \in [0,\infty)$,

(4) $(W_tV_t)_{t\geq 0}$ je $(\mathcal{F}_t)$-martingal,

(5) reálná a imaginární část z $(e^{iW_t + t/2})_{t\geq 0}$ jsou $(\mathcal{F}_t)$-martingaly.

[1] $X_t = \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j 1_{[t_j<t\leq t_{j+1}]}$, kde $\xi_j \in \mathbb{L}_\infty(\mathcal{F}_{t_j}) \quad \Rightarrow \quad I_t(X) = \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j (M_{t\wedge t_{j+1}} - M_{t\wedge t_j}), \quad t \in [0,T]$.

4. Itôova formule

- Buď $(W_t)_{t\geq 0}$ n-dimenzionální $(\mathcal{F}_t)$-Wienerův proces a $(X_t)_{t\geq 0} \in \mathbb{A}(\mathcal{F}_t)^m$ spojitý takový, že

$$\boxed{X_t \overset{\text{sj}}{=} X_0 + \int_0^t b_s \,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_s \,\mathrm{d}W_s, \qquad t \in [0,T],}$$

kde $\mathbb{A}(\mathcal{F}_t)^m \ni b \overset{\text{sj}}{\in} \mathbb{L}_1(0,T;\mathbb{R}^n)$ a $\sigma \in \mathcal{S}_W(0,T;\mathbb{R}^{m\times n})$. Nechť $f \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^m)$, pak

$$\boxed{\begin{aligned} Y_t \triangleq f(t,X_t) &\overset{\text{sj}}{=} f(0,X_0) + \int_0^t \nabla_x f(s,X_s)^\intercal \sigma_s \,\mathrm{d}W_s \\ &+ \int_0^t \Big[\tfrac{\partial}{\partial s} f(s,X_s) + \nabla_x f(s,X_s)^\intercal b_s + \tfrac{1}{2}\operatorname{tr}\{\nabla_x^2 f(s,X_s)\,\sigma_s\sigma_s^\intercal\}\Big]\,\mathrm{d}s, \quad t\in[0,T] \end{aligned}}$$

Je-li $g \in C^2(\mathbb{R})$ a $m = n = 1$, pak

$$Z_t \triangleq g(X_t) \overset{\text{sj}}{=} Z_0 + \int_0^t [g'(X_s)b_s + \tfrac{1}{2}\, g''(X_s)\sigma_s^2]\,\mathrm{d}s + \int_0^t g'(X_s)\sigma_s\,\mathrm{d}W_s, \quad t\in[0,T].$$

V diferenciálním tvaru pak symbolicky na intervalu $[0,T]$ můžeme psát

$$\boxed{\mathrm{d}X_t = b_t\,\mathrm{d}t + \sigma_t\,\mathrm{d}W_t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}g(X_t) = \big[\,g'(X_t)\,b_t + \tfrac{1}{2}\,g''(X_t)\,\sigma_t^2\,\big]\,\mathrm{d}t + g'(X_t)\,\sigma_t\,\mathrm{d}W_t}$$

Příklad 4. Buď $(W_t, V_t)^\intercal_{t\geq 0}$ dvourozměrný Wienerův proces. Určete stochastický diferenciál následujících procesů indexovaných $t \in [0,\infty)$

(1) $X_t = \sin W_t, Y_t = \cos W_t, Z_t = W_t^3$,
(2) $X_t = e^{t/2}\sin W_t, Y_t = e^{t/2}\cos W_t$,
(3) $X_t = \exp\{W_t - t/2\}, Y_t = X_t/(1+X_t), Z_t = \ln(1+X_t)$,
(4) $X_t = e^{V_t}\sin W_t, Y_t = e^{V_t}\cos W_t$.

Příklad 5. Buď $(W_t, V_t)^\intercal_{t\geq 0}$ dvourozměrný Wienerův proces vzhledem k filtraci $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

(1) Určete stochastický diferenciál procesu $X_t = tW_t$. Vyjádřete hodnotu procesu $Y_t \triangleq \int_0^t s\,\mathrm{d}W_s, t\geq 0$ bez použití stochastického integrálu. Určete $\mathbb{E}Y_t, \operatorname{var}(Y_t)$ pro $t\in[0,\infty)$.
(2) Buďte $(X_t,Y_t)_{t\geq 0}$ spojité $(\mathcal{F}_t)$-adaptované procesy se stochastickým diferenciálem po řadě
$$\mathrm{d}X_t = -Y_t\,\mathrm{d}W_t, \quad \mathrm{d}Y_t = X_t\,\mathrm{d}W_t.$$
Nechť $(X_0,Y_0)^\intercal = (x_0,y_0)^\intercal \in \mathbb{R}^2$. Ukažte, že $R_t \triangleq \sqrt{X_t^2+Y_t^2}$ je deterministický proces a spočtěte jeho střední hodnotu.
(3) Buďte $(X_t,Y_t)_{t\geq 0}$ spojité $(\mathcal{F}_t)$-adaptované procesy se stochastickým diferenciálem po řadě
$$\mathrm{d}X_t = X_t(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t), \quad \mathrm{d}Y_t = Y_t(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}V_t).$$
Spočtěte stochastický integrál procesu $Z_t = X_t^2 + Y_t^2, t\geq 0$.
(4) Uvažujete procesy $(X_t,Y_t)_{t\geq 0}$ z předchozího bodu a předpokládejte, že jsou kladné. Spočtěte stochastický diferenciál procesu $U_t = X_t/Y_t, t\geq 0$.[2] Porovnejte navzájem rozdělení následujících procesů $(X_t, X_t^{-1}, Y_t, Y_t^{-1})_{t\geq 0}$.

Příklad 6. Bachelierův model pro tržní cenu akcie $(S_t)_{t\geq 0}$ (pro jednoduchost s nulovým driftem a jednotkovou „volatilitou“ s nulovou „bezrizikovou“ úrokovou mírou). Zajímá nás *spravedlivá cena evropské kupní opce* $F_t = F(t,S_t)$ v čase $t\in[0,T]$ s dobou expirace $T\in(0,\infty)$ a vypořádací cenou $K\in\mathbb{R}$, tedy $F(T,S_t) = (S_T-K)^+$.

Tržní cenu akcie $(S_t)_{t\geq 0}$ zde modelujeme pomocí aritmetického Brownova pohybu $S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t$, kde $S_0 \in \mathbb{L}(\mathcal{F}_0)$ a kde $(W_t)_{t\geq 0}$ je $(\mathcal{F}_t)$-Wienerův proces. Zde pro jednoduchost volíme $\mu = 0, \sigma = 1$. Ukažte, že pro funkci $F(t,x)$ takovou, že $F(T,x) \triangleq (x-K)^+$ a že

$$\begin{aligned} F(t,x) &\triangleq (x-K)\,\Phi\big(\tfrac{x-K}{\sqrt{T-t}}\big) + \sqrt{T-t}\,\varphi\big(\tfrac{x-K}{\sqrt{T-t}}\big), \quad t\in[0,T), \qquad &&\text{kde} \quad \varphi(x) \triangleq \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2} \\ F(T,x) &\triangleq (x-K)^+ &&\text{a kde} \quad \Phi(x) \triangleq \int_{-\infty}^x \varphi(y)\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

platí $\frac{\partial}{\partial x}F(t,x) = \Phi\big(\frac{x-K}{\sqrt{T-t}}\big)$ a $\frac{\partial}{\partial t}F(t,x) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(x,t)$, a tedy dle Itôovy formule

$$F(t,S_t) \overset{\text{sj}}{=} F(0,S_0) + \int_0^t \Phi\big(\tfrac{S_u-K}{\sqrt{T-t}}\big)\,\mathrm{d}W_u, \quad t\in[0,T).$$

Rovnost pro $t = T$ pak dostaneme limitním přechodem $t\uparrow T$.

---

[2] Předpokládejte, že víte, že Itôova formule platí, i když místo předpokladu $f\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^m)$ máte splněn pouze předpoklad, že $f\in C^{1,2}(G)$, kde G je otevřená nadmnožina množiny $\{(t,X_t(\omega)); t\in[0,T], \omega\in\Omega\}$.

Připomenutí Girsanovovy věty: *Uvažujme n-rozměrný Wienerův proces* $(W_t)_{t\geq 0}$ *na stochastické bázi* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$. *Buď* $T \in [0,\infty)$ *a nechť* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *je n-rozměrný progresivně měřitelný proces takový, že* $Y \overset{sj}{\in} \mathbb{L}_2(0,T;\mathbb{R}^n)$ *a že* $Y_t = 0$ *pro* $t \in (T,\infty)$. *Nechť* $\mathbb{E}\mathcal{E}_T(\int Y^{\intercal} dW) = 1$. *Pak předpis*

$$\tilde{\mathbb{P}} : A \in \mathcal{F} \mapsto \int_F \mathcal{E}_T(\int Y^{\intercal} dW)\, d\mathbb{P} = \mathbb{E}[\mathcal{E}_T(\int Y^{\intercal} dW); F]$$

definuje pravděpodobnostní míru $\tilde{\mathbb{P}}$ *na* $(\Omega, \mathcal{F})$ *takovou, že proces* $\tilde{W}_t \triangleq W_t - \int_0^t Y_s\, ds, t \geq 0$ *je n-rozměrný Wienerův proces na* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \tilde{\mathbb{P}})$.

Poznámka Zde $\mathcal{E}_t(X) \triangleq \exp\{X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t\}, t \geq 0$ značí stochastickou exponenciálu ze spojitého semimartingalu $(X_t)_{t\geq 0}$. Tedy

$$\mathcal{E}_t(\int Y^{\intercal} \mathrm{d}W) \overset{\text{sj}}{=} \exp\{\int_0^t Y_s^{\intercal} \mathrm{d}W_s - \tfrac{1}{2}\int_0^t Y_s^{\intercal} Y_s\, \mathrm{d}s\}, \quad t \geq 0.$$

Příklad 7. Buď $(W_t)_{t\geq 0}$ Wienerův proces na $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ a $\rho \neq 0$.

(1) Pro $T \in [0,\infty)$ najděte pravděpodobnost $\tilde{\mathbb{P}}_T \sim \mathbb{P}$ takovou, že $\tilde{W}_t^{(T)} \triangleq W_t - \rho \min\{t,T\}, t \geq 0$ je Wienerův proces na $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \tilde{\mathbb{P}}_T)$.

(2) Dokažte, že neexistuje míra $\tilde{\mathbb{P}} \sim \mathbb{P}$ taková, že $\tilde{W}_t \triangleq W_t - \rho t, t \geq 0$ je Wienerův proces na $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \tilde{\mathbb{P}})$.

Příklad 8. (Bachelierův model) Uvažujte model tržní ceny akcie $(S_t)_{t\geq 0}$ sledující aretmetický Brownův pohyb, tedy $S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t$, kde $(W_t)_{t\geq 0}$ je Wienerův proces nezávislý s veličinou S_0. Předpokládejte nulovou úrokovou míru na peněžním trhu. Označme $\mathcal{F}_t \triangleq \sigma(S_0, W_s; s \leq t)$.

(1) Pro $T \in [0,\infty)$ ukažte, že existuje $\tilde{\mathbb{P}}_T \sim \mathbb{P}$ martingalová míra procesu $S_t^{(T)} \triangleq S_{t\wedge T}, t \geq 0$ taková, že proces $\tilde{W}_t^{(T)} \triangleq W_t + \frac{\mu}{\sigma}\min\{t,T\}, t \geq 0$ je Wienerův při $\tilde{\mathbb{P}}_T$.

(2) Ukažte, že pro $K \in \mathbb{R}$ platí

$$\tilde{\mathbb{E}}_T[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] \overset{\text{sj}}{=} (S_t - K)\,\Phi\big(\tfrac{S_t - K}{\sigma\sqrt{T-t}}\big) + \sigma\sqrt{T-t}\,\varphi\big(\tfrac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\big) =: C_t, \quad t \in [0,T).$$

(3) Pomocí Itôovy formule ukažte, že

$$(S_T - K)^+ \overset{\text{sj}}{=} C_t + \int_t^T \Phi\big(\tfrac{S_s-K}{\sigma\sqrt{T-s}}\big)\,\mathrm{d}S_s, \quad t \in [0,T).$$

(4) Ukažte, že pro $K \in \mathbb{R}$ platí

$$\tilde{\mathbb{P}}_T(S_T > K | \mathcal{F}_t) \overset{\text{sj}}{=} \Phi\big(\tfrac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\big) =: \tilde{C}_t, \quad t \in [0,T).$$

(5) Pomocí Itôovy formule ukažte, že

$$1_{[S_T > K]} \overset{\text{sj}}{=} \tilde{C}_t + \int_t^T \tfrac{1}{\sigma\sqrt{T-s}}\,\varphi\big(\tfrac{S_s-K}{\sigma\sqrt{T-s}}\big)\,\mathrm{d}S_s, \quad t \in [0,T).$$

Příklad 9. Uvažujte model tržní ceny akcie $(S_t)_{t\geq 0}$ sledující geometrický Brownův pohyb, tedy

$$S_t = S_0 \exp\{(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\}, \qquad \mathrm{d}S_t = S_t(\mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t),$$

kde $(W_t)_{t\geq 0}$ je Wienerův proces nezávislý s veličinou $S_0 > 0$. Označme $\mathcal{F}_t \triangleq \sigma(S_0, W_s; s \leq t)$ a předpokládejme, že úroková míra na peněžním trhu je rovna konstantě $r \in [0,\infty)$. Buď $\hat{S}_t \triangleq e^{-rt}S_t, t \geq 0$ diskontovaná tržní cena akcie pro $t \in [0,\infty)$.

(1) Pro $T \in [0,\infty)$ ukažte, že existuje $\tilde{\mathbb{P}}_T \sim \mathbb{P}$ martingalová míra procesu $(\hat{S}_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ taková, že $\tilde{W}_t^{(T)} \triangleq W_t + \frac{\mu - r}{\sigma}\min\{t,T\}, t \geq 0$ je Wienerův při $\tilde{\mathbb{P}}_T$.

(2) Ukažte, že pro $K \in (0,\infty)$ platí

$$\tilde{\mathbb{E}}_T[e^{-rT}(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] \overset{\text{sj}}{=} \hat{S}_t\,\Phi\big(\tfrac{\ln(\hat{S}_t/K) + rT + \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}}\big) - Ke^{-rT}\,\Phi\big(\tfrac{\ln(\hat{S}_t/K) + rT - \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}}\big), \quad t \in [0,T).$$

(3) Pomocí Itôovy formule ukažte, že

$$e^{-rT}(S_T - K)^+ = (\hat{S}_T - e^{-rT}K)^+ \overset{\text{sj}}{=} \hat{C}_t + \int_t^T \Phi\big(\tfrac{\ln(\hat{S}_s/K) + rT + \sigma^2(T-s)/2}{\sigma\sqrt{T-s}}\big)\,\mathrm{d}\hat{S}_s, \quad t \in [0,T).$$

(4) Ukažte, že pro $K \in (0,\infty)$ platí

$$e^{-rT}\tilde{\mathbb{P}}_T(S_T > K | \mathcal{F}_t) \overset{\text{sj}}{=} e^{-rT}\Phi\big(\tfrac{\ln(\hat{S}_t/K) + rT - \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}}\big) =: \bar{C}_t, \quad t \in [0,T).$$

(5) Pomocí Itôovy formule ukažte, že

$$e^{-rT}1_{[S_T > K]} \overset{\text{sj}}{=} \bar{C}_t + \int_t^T e^{-rT}\tfrac{1}{\hat{S}_s\sigma\sqrt{T-s}}\varphi\big(\tfrac{\ln(\hat{S}_s/K) + rT - \sigma^2(T-s)/2}{\sigma\sqrt{T-s}}\big)\,\mathrm{d}\hat{S}_s, \quad t \in [0,T).$$

Příklad 10. V Black-Scholesově modelu pro tržní cenu akcie $(S_t)_{t\geq 0}$ spočtěte spravedlivou (bezarbitrážní) cenu následujícího derivátu (evropského typu) s dobou vypořádání $T \in (0,\infty)$

(1) $F_T \triangleq \ln S_T$
(2) $F_T \triangleq S_T^k$ pro $k \in \mathbb{R}$.

Příklad 11. V Black-Scholesově modelu pro tržní cenu akcie $(S_t)_{t\geq 0}$ spočtěte spravedlivou (bezarbitrážní) cenu derivátu

$$F_T \triangleq (\tfrac{1}{T}\textstyle\int_0^T \ln S_t \,\mathrm{d}t - K)^+$$

(asijského typu) s dobou vypořádání $T \in (0,\infty)$.

Příklad 12. V Bachelierově modelu pro tržní cenu akcie $(S_t)_{t\geq 0}$ s nulovou bezrizikovou úrokovou mírou spočtěte spravedlivou (bezarbitrážní) cenu asijské kupní opce

$$F_T \triangleq (\tfrac{1}{T}\textstyle\int_0^T S_t \,\mathrm{d}t - K)^+$$

s vypořádací cenou K, dobou vypořádání $T \in (0,\infty)$ a dobou vypsání $T_0 = 0$.

Příklad 13. Uvažujte Black-Scholesův model pro tržní cenu akcie $(S_t)_{t\geq 0}$. Uvažujte asijskou kupní opci

$$F_T \triangleq (\tfrac{1}{T}\textstyle\int_0^T S_t \,\mathrm{d}t - K)^+$$

s vypořádací cenou K, dobou vypořádání $T \in (0,\infty)$ a dobou vypsání $T_0 = 0$. Předpokládejte, že již v čase $t \in (0,T)$ víte, že dojde k uplatnění opce, tj. že

$$\tfrac{1}{T}\textstyle\int_0^t S_s \,\mathrm{d}s \geq K.$$

Spočtěte pro tento případ hodnotu spravedlivé ceny derivátu F_T.

Poznámka. V následujícím příkladu předpokládejte, že pro Wienerův proces $(W_t)_{t\geq 0}$ víte, že

$$W_t^* \triangleq \max_{s\leq t} W_s \sim |W_t|, \quad t \geq 0.$$

Příklad 14. V Bachelierově modelu pro tržní cenu akcie $(S_t)_{t\geq 0}$ s nulovou bezrizikovou úrokovou mírou spočtěte spravedlivou (bezarbitrážní) cenu následujícího derivátu

$$F_T \triangleq S_T^* \triangleq \max_{t\leq T} S_t.$$

Poznámka. V následujícím příkladu předpokládejte, že pro Wienerův proces $(W_t)_{t\geq 0}$ víte, že

$$\mathbb{P}(W_t < y - x | W_t^* \geq y) = \mathbb{P}(W_t > y + x | W_t^* \geq y), \quad x, y \in [0,\infty).$$

Tato rovnost vychází z *principu zrcadlení pro Wienerův proces.*

Příklad 11. V Black-Scholesově modelu pro tržní cenu akcie $(S_t)_{t\geq 0}$ spočtěte spravedlivou (bezarbitrážní) cenu derivátu

$$F_T \triangleq S_T^* \triangleq \max_{t\leq T} S_t.$$