

$$y_{k+1} = y_k + h (w_1 q_1 + w_2 q_2 + w_3 q_3 + w_4 q_4)$$

- **Standardní formule:**

$$w_1 = w_4 = 1/6, w_2 = w_3 = 1/3,$$

$$q_1 = f(t, y),$$

$$q_2 = f(t + h/2, y + h/2 q_1),$$

$$q_3 = f(t + h/2, y + h/2 q_2),$$

$$q_4 = f(t + h, y + h q_3).$$

- **Třiosminová formule:**

$$w_1 = w_4 = 1/8, w_2 = w_3 = 3/8,$$

$$q_1 = f(t, y),$$

$$q_2 = f(t + h/3, y + h/3 q_1),$$

$$q_3 = f(t + 2h/3, y + h(-1/3 q_1 + q_2)),$$

$$q_4 = f(t + h, y + h(q_1 - q_2 + q_3)).$$

# Asymptotický odhad chyby $e_n \leq Nh^p E_L(x_n - a)$

Eulerova metoda:  $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ ,  
 $h = 1/2^{-6} = 0.015625$

úloha	$y' = y$ $y(0) = 1$			$y' = -y$ $y(0) = 1$		
řešení	$y(x) = \exp(x)$			$y(x) = \exp(-x)$		
$x_n$	$y_n$	$y_n - y(x_n)$	odhad $e_n$	$y_n$	$y_n - y(x_n)$	odhad $e_n$
1.0	2.69735	-0.02093	0.03649	0.364987	-0.002892	0.013424
2.0	7.27567	-0.11339	0.36882	0.133215	-0.002120	0.049914
3.0	19.62499	-0.46055	2.99487	0.048622	-0.001165	0.149016
4.0	52.93537	-1.66278	22.86218	0.017746	-0.000570	0.418735
5.0	142.7850	-5.6282	170.9223	0.006477	-0.000261	1.151666

chyba  $\approx 4\%$     40x větší

chyba  $\approx 4\%$     10 000x větší

# Asymptotický odhad chyby $e_n \leq Nh^p E_L(x_n - a)$

Eulerova metoda:  $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ ,  
 $h = 1/2^{-6} = 0.015625$

úloha	$y' = y$ $y(0) = 1$			$y' = -y$ $y(0) = 1$		
řešení	$y(x) = \exp(x)$			$y(x) = \exp(-x)$		
$x_n$	$y_n$	$y_n - y(x_n)$	odhad $e_n$	$y_n$	$y_n - y(x_n)$	odhad $e_n$
1.0	2.69735	-0.02093	0.03649	0.364987	-0.002892	0.013424
2.0	7.27567	-0.11339	0.36882	0.133215	-0.002120	0.049914
3.0	19.62499	-0.46055	2.99487	0.048622	-0.001165	0.149016
4.0	52.93537	-1.66278	22.86218	0.017746	-0.000570	0.418735
5.0	142.7850	-5.6282	170.9223	0.006477	-0.000261	1.151666

chyba  $\approx 4\%$     **40x větší**

chyba  $\approx 4\%$     **10 000x větší**

# Odhad chyby metodou polovičního kroku

Úloha  $y' = 1 - y^2$ ,  $y(0) = 5$ ,

Runge-Kutta 4. řádu (standartní formule),  $h = 0.04$

$x_n$	$y_n$	chyba $y_n - y(x_n)$	odhad met. pol. kr.
0.00	5.000000	0.0E+00	0.0E+00
0.04	4.200388	3.3E-05	
0.08	3.630695	3.8E-05	2.4E-05
0.12	3.205414	3.5E-05	
0.16	2.876746	3.1E-05	2.2E-05
0.20	2.615879	2.7E-05	
0.24	2.404407	2.3E-05	1.7E-05
0.28	2.230026	2.1E-05	
0.32	2.084192	1.8E-05	1.3E-05
0.36	1.960791	1.5E-05	
⋮			

# Odhad chyby metodou polovičního kroku

Úloha  $y' = 1 - y^2$ ,  $y(0) = 5$ ,

Runge-Kutta 4. řádu (standartní formule),  $h = 0.04$

$x_n$	$y_n$	chyba $y_n - y(x_n)$	odhad met. pol. kr.
0.00	5.000000	0.0E+00	0.0E+00
0.04	4.200388	3.3E-05	
0.08	3.630695	3.8E-05	2.4E-05
0.12	3.205414	3.5E-05	
0.16	2.876746	3.1E-05	2.2E-05
0.20	2.615879	2.7E-05	
0.24	2.404407	2.3E-05	1.7E-05
0.28	2.230026	2.1E-05	
0.32	2.084192	1.8E-05	1.3E-05
0.36	1.960791	1.5E-05	
⋮			

# Odhad chyby metodou polovičního kroku (2)

Úloha  $y' = 1 - y^2$ ,  $y(0) = 5$ ,

Runge-Kutta 4. řádu (standartní formule),  $h = 0.04$

$x_n$	$y_n$	chyba $y_n - y(x_n)$	odhad met. pol. kr.
⋮			
0.64	1.455073	0.6E-05	0.5E-05
0.68	1.412863	0.6E-05	
0.72	1.375166	0.5E-05	0.4E-05
0.76	1.341398	0.5E-05	
0.80	1.311068	0.4E-05	0.3E-05
0.84	1.283759	0.4E-05	
0.88	1.259116	0.4E-05	0.3E-05
0.92	1.236835	0.3E-05	
0.96	1.216654	0.3E-05	0.2E-05
1.00	1.198345	0.3E-05	

# Vliv zaokrouhlovací chyby

Úloha  $y' = 1 - y$ ,  $y(0) = 2$ , přesné řešení  $y = 1 + \exp(-x)$ ,  
výpočet metodou 2. řádu v jednoduché přesnosti

$x$	$h$	$y_n$	diskretizační ch.	zaokrouhlovací ch.	celková ch.
1.0	1E-2	1.36789477	-0.00001527	-0.00000006	-0.00001533
	1E-3	1.36788023	-0.00000016	-0.00000063	-0.00000079
	1E-4	1.36788575	0.00000000	-0.00000631	-0.00000631
	1E-5	1.36794278	0.00000000	-0.00006334	-0.00006334
	1E-6	1.36852278	0.00000000	-0.00064334	-0.00064334
2.0	1E-2	1.13534665	-0.00001129	-0.00000008	-0.00001137
	1E-3	1.13533631	-0.00000012	-0.00000091	-0.00000103
	1E-4	1.13534376	0.00000000	-0.00000848	-0.00000848
	1E-5	1.13542195	0.00000000	-0.00008667	-0.00008667
	1E-6	1.13617413	0.00000000	-0.00083885	-0.00083885
3.0	1E-2	1.04979342	-0.00000624	-0.00000011	-0.00000635
	1E-3	1.04978815	-0.00000006	-0.00000102	-0.00000108
	1E-4	1.04979648	-0.00000000	-0.00000941	-0.00000941
	1E-5	1.04988325	-0.00000000	-0.00009618	-0.00009618
	1E-6	1.05090221	-0.00000000	-0.00111514	-0.00111514

Úloha  $y' = 1 - y$ ,  $y(0) = 2$ , přesné řešení  $y = 1 + \exp(-x)$ ,  
výpočet metodou 2. řádu v jednoduché přesnosti

$x$	$h$	$y_n$	diskretizační ch.	zaokrouhlovací ch.	celková ch.
1.0	1E-2	1.36789477	-0.00001527	-0.00000006	-0.00001533
	1E-3	1.36788023	-0.00000016	-0.00000063	-0.00000079
	1E-4	1.36788575	0.00000000	-0.00000631	-0.00000631
	1E-5	1.36794278	0.00000000	-0.00006334	-0.00006334
	1E-6	1.36852278	0.00000000	-0.00064334	-0.00064334
2.0	1E-2	1.13534665	-0.00001129	-0.00000008	-0.00001137
	1E-3	1.13533631	-0.00000012	-0.00000091	-0.00000103
	1E-4	1.13534376	0.00000000	-0.00000848	-0.00000848
	1E-5	1.13542195	0.00000000	-0.00008667	-0.00008667
	1E-6	1.13617413	0.00000000	-0.00083885	-0.00083885
3.0	1E-2	1.04979342	-0.00000624	-0.00000011	-0.00000635
	1E-3	1.04978815	-0.00000006	-0.00000102	-0.00000108
	1E-4	1.04979648	-0.00000000	-0.00000941	-0.00000941
	1E-5	1.04988325	-0.00000000	-0.00009618	-0.00009618
	1E-6	1.05090221	-0.00000000	-0.00111514	-0.00111514