

**Tomáš Cipra: Finanční a pojistné vzorce. Grada Publishing, Praha 2006 (374 stran, ISBN: 80-247-1633-X)**

## **OBSAH**

SEZNAM NĚKTERÝCH SYMBOLŮ .....	13
1. ÚVOD .....	17
<b>I. FINANČNÍ VZORCE .....</b>	<b>19</b>
2. JEDNODUCHÉ ÚROČENÍ A DISKONTOVÁNÍ .....	21
2.1. Jednoduché úročení .....	21
2.2. Standardy úročení .....	23
2.3. Področní jednoduché úročení .....	24
2.4. Jednoduché diskontování .....	25
2.5. Skonto .....	26
3. SLOŽENÉ ÚROČENÍ A DISKONTOVÁNÍ .....	27
3.1. Složené úročení .....	27
3.2. Složené diskontování .....	28
3.3. Področní složené úročení a diskontování .....	29
3.4. Smíšené úročení .....	31
4. SPOJITÉ ÚROČENÍ A DISKONTOVÁNÍ .....	33
5. KLASICKÁ ANALÝZA ÚROKOVÝCH MĚR .....	35
5.1. Bezriziková a reálná úroková míra .....	35
5.2. Časová struktura úrokových měr .....	36
6. SYSTÉMY FINANČNÍCH TOKŮ .....	37
6.1. Současná a budoucí hodnota .....	37
6.2. Vnitřní míra výnosnosti .....	40
6.3. Doba návratnosti .....	41
6.4. Durace .....	42
6.5. Konvexita .....	43

7. DŮCHODY .....	45
7.1. Anuitní počet .....	45
7.2. Dynamické důchody .....	49
7.3. Področní důchody .....	52
7.4. Spojité důchody .....	54
7.5. Umořování dluhu .....	54
8. ODPISY .....	57
9. FINANČNÍ INSTRUMENTY .....	59
9.1. Diskontní cenné papíry .....	59
9.2. Dluhopisy .....	60
9.3. Akcie .....	68
9.4. Měny .....	73
10. TERMÍNOVÉ OBCHODY A FINANČNÍ DERIVÁTY .....	75
10.1. Obecná klasifikace .....	75
10.2. Forwardy .....	76
10.3. Futures .....	79
10.4. Swapy .....	81
10.5. Opce .....	82
11. TEORIE UŽITKU .....	91
12. MÍRA ZISKU A FINANČNÍ RIZIKO .....	93
12.1. Míra zisku .....	93
12.2. Finanční riziko .....	95
12.3. Metodika VaR .....	99
12.4. Úvěr v riziku .....	102
13. ANALÝZA PORTFOLIA A MODEL CAPM .....	105
13.1. Konstrukce portfolia .....	105
13.2. Portfolio s bezrizikovým aktivem .....	108
13.3. Model CAPM .....	110
14. ARBITRÁŽNÍ TEORIE .....	113
15. FINANČNÍ STOCHASTICKÁ ANALÝZA .....	117
15.1. Wienerův proces ve financích .....	117
15.2. Poissonův proces ve financích .....	118
15.3. Itoův náhodný integrál .....	119
15.4. Stochastické diferenciální rovnice SDE .....	121
15.5. Itoovo lemma .....	122
15.6. Girsanovova věta o ekvivalentní martingalové pravděpodobnosti .....	123

15.7. Věta o martingalové reprezentaci .....	125
15.8. Oceňování derivátů pomocí ekvivalentních martingalových pravděpodobností .....	125
15.9. Oceňování derivátů pomocí parciálních diferenciálních rovnic PDE ...	127
15.10. Modelování časové struktury úrokových měř .....	128
<b>II. POJISTNÉ VZORCE .....</b>	<b>133</b>
16. KLASIFIKACE POJIŠTĚNÍ .....	135
17. AKTUÁRSKÁ DEMOGRAFIE .....	141
17.1. Vybrané demografické ukazatele .....	141
17.2. Úmrtnostní tabulky .....	144
17.3. Modelování úmrtnosti .....	148
17.4. Modely s více typy výstupů .....	151
17.5. Modely s více životy .....	152
17.6. Komutační čísla .....	153
18. KLASICKÉ ŽIVOTNÍ POJIŠTĚNÍ .....	155
18.1. Základní pojmy životního pojištění .....	155
18.2. Značení a výpočetní principy životního pojištění .....	157
18.3. Technické rezervy v životním pojištění .....	159
18.4. Pojištění pro případ dožití .....	163
18.5. Pojištění pro případ smrti .....	164
18.6. Další produkty kapitálového životního pojištění .....	168
18.7. Důchodová pojištění .....	171
18.8. Pojištění více životů .....	176
18.9. Výpočty založené na rezervě pojistného .....	177
18.10. Lékařský underwriting .....	180
19. MODERNÍ PŘÍSTUPY K ŽIVOTNÍMU POJIŠTĚNÍ .....	181
19.1. Pojištění vážných onemocnění .....	181
19.2. Flexibilní produkty životního pojištění .....	183
19.3. Investiční životní pojištění .....	184
19.4. Profit testing .....	186
19.5. Embedded Value .....	188
19.6. Fair Value .....	190
20. PENZIJNÍ POJIŠTĚNÍ .....	193
20.1. Základní pojmy penzijního pojištění .....	193
20.2. Příspěvkově definovaný penzijní plán .....	195
20.3. Dávkově definovaný penzijní plán .....	197

21. KLASICKÉ NEŽIVOTNÍ POJIŠTĚNÍ .....	203
21.1. Základní pojmy neživotního pojištění .....	203
21.2. Kalkulace pojistného v neživotním pojištění .....	206
21.3. Formy neživotního pojištění a spoluúčast .....	209
21.4. Technické rezervy v neživotním pojištění .....	211
21.5. Systémy bonus-malus .....	217
22. TEORIE RIZIKA V POJIŠŤOVNICTVÍ .....	219
22.1. Kolektivní model rizika .....	219
22.2. Rozdělení škodních úhrnů .....	222
22.3. Kopula .....	226
22.4. Kredibilitní pojistné .....	227
22.5. Pravděpodobnost ruinování .....	230
22.6. Spoluúčast .....	231
22.7. Výpočty v systémech bonus-malus .....	234
23. ZDRAVOTNÍ POJIŠTĚNÍ .....	237
24. ZAJIŠTĚNÍ .....	239
24.1. Základní pojmy zajištění .....	239
24.2. Typy zajištění .....	241
24.3. Solventnost pojišťoven .....	247
24.4. Alternativní přenos rizik ART .....	249
<b>III. VZORCE Z VYBRANÝCH OBORŮ .....</b>	<b>253</b>
25. MATEMATICKÉ REPETITORIUM .....	255
25.1. Mocniny s celým exponentem .....	255
25.2. Odmocniny .....	255
25.3. Mocniny s racionálním exponentem .....	255
25.4. Mocniny s reálným exponentem .....	255
25.5. Vzorce $a^n \pm b^n$ .....	255
25.6. Logaritmy .....	256
25.7. Kombinatorika .....	256
25.8. Binomická věta .....	257
25.9. Součty mocnin přirozených čísel .....	257
25.10. Některé číselné řady .....	258
25.11. Průměry .....	259
25.12. Funkce gama a beta .....	260
26. TEORIE PRAVDĚPODOBNOTI .....	261
26.1. Náhodné jevy a pravděpodobnost .....	261
26.2. Podmíněná pravděpodobnost a nezávislost jevů .....	262
26.3. Náhodné veličiny a jejich základní charakteristiky .....	263

26.4.	Některá rozdělení diskretních náhodných veličin .....	265
26.5.	Některá rozdělení spojitých náhodných veličin .....	266
26.6.	Náhodné vektory a jejich základní charakteristiky .....	268
26.7.	Transformace náhodných veličin .....	270
26.8.	Podmíněná střední hodnota .....	271
26.9.	Martingaly .....	272
26.10.	Vytvořující funkce .....	273
26.11.	Konvoluce a součty náhodných veličin .....	275
26.12.	Náhodné součty náhodných veličin .....	276
26.13.	Některé nerovnosti .....	276
26.14.	Limitní věty teorie pravděpodobnosti .....	277
27.	POPISNÁ A MATEMATICKÁ STATISTIKA .....	279
27.1.	Výběrová šetření: prostý náhodný výběr .....	279
27.2.	Výběrová šetření: oblastní (stratifikovaný) výběr .....	280
27.3.	Elementární statistické zpracování .....	280
27.4.	Výběrové kvantily .....	281
27.5.	Míry polohy (úrovně) .....	282
27.6.	Míry rozptýlenosti (variability, volatility) .....	283
27.7.	Míry koncentrace .....	284
27.8.	Míry závislosti (korelovanosti) .....	284
27.9.	Bodové a intervalové odhady .....	285
27.10.	Testování hypotéz .....	288
27.11.	Regresní analýza .....	290
27.12.	Analýza rozptylu (ANOVA) .....	296
27.13.	Mnohorozměrná statistická analýza .....	297
28.	EKONOMETRIE .....	299
28.1.	Multikolinearita .....	299
28.2.	Využití apriorní informace .....	300
28.3.	Kvalitativní proměnné .....	301
28.4.	Probitové a logitové modely .....	301
28.5.	Náhodné regresory a odhad metodou instrumentálních proměnných ...	302
28.6.	Víceroznicové modely .....	303
28.7.	Soustava simultánních rovnic a 2-SLS-odhad .....	303
29.	INDEXNÍ TEORIE .....	305
29.1.	Indexy jako nástroje srovnání .....	305
29.2.	Souhrnné indexy .....	306
29.3.	Praxe cenových indexů v ČR .....	306
29.4.	Burzovní indexy .....	308
30.	NÁHODNÉ PROCESY .....	309
30.1.	Klasifikace a základní charakteristiky procesů .....	309

30.2. Markovovy řetězce .....	311
30.3. Markovovy procesy .....	314
30.4. Některé náhodné procesy .....	316
30.5. Spektrální vlastnosti stacionárních procesů .....	319
<b>31. STATISTICKÁ ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD .....</b>	<b>323</b>
31.1. Předpovědi v časových řadách .....	323
31.2. Dekompozice (ekonomických) časových řad .....	323
31.3. Odhad korelačních a spektrálních charakteristik .....	330
31.4. Lineární časové řady .....	331
31.5. Nelineární a finanční časové řady .....	335
31.6. Vícerozměrné časové řady .....	339
31.7. Kalmanův filtr .....	340
<b>LITERATURA .....</b>	<b>343</b>
<b>REJSTRÍK .....</b>	<b>349</b>

# 1. ÚVOD

S finančními a pojistnými výpočty se dnes setkává stále více uživatelů jak v rámci své profese, tak v běžném životě. Vhodnou pomůckou proto může být přehled vzorců finanční a pojistné matematiky, které se při takových výpočtech používají. Přestože přehledy tohoto typu jsou v zahraničí velmi oblíbeny, obdobná česká publikace zatím chybí a autor měl smělou ambici vytvořit analogii u nás velmi používaného Rektorysova „Přehledu užití matematiky“, na kterém spolupracoval, právě pro oblast financí a pojišťovnictví. V některých případech by místo termínu vzorec měl být použit termín metoda (postup, algoritmus), protože odpovídající finanční či pojistné výpočty do jednoho vzorce prostě shrnout nelze a verbální popis nevyžadující zavádění symbolů je jednodušší.

Snahou autora mimo jiné bylo, aby

- vzorce byly prakticky využitelné: tomuto cíli byl přednostně podřízen jejich výběr; na druhé straně se ukazuje, že s postupem času se v praxi začínají fakticky využívat i zdánlivě velmi abstraktní formule vyšší matematiky, např. při praktickém oceňování finančních derivátů, při odhadování finančního rizika (např. v rámci vykazování kapitálové přiměřenosti), v rámci účetních postupů založených na Fair Value, v rámci alternativního přenosu rizik ART v pojišťovnictví aj.;
- vzorce byly bezchybné, neboť v rámci uvažovaných disciplín se často hekticky publikují nezkontrolované a nevyzkoušené formule a metody s řadou nekorektností (vzorce jsou zde ovšem uváděny bez důkazů, neboť jejich odvození není cílem tohoto přehledu);
- vzorce byly přehledně uspořádány a popsány včetně názorného značení a umožňovaly tak rychlé a operativní vyhledávání (ke vzorcům je často připojen vysvětlující komentář a v řadě případů jsou uváděny odkazy na jiné související části textu, takže přehledem lze procházet efektivním způsobem);
- byl uváděn vždy takový tvar vzorce, který je v průměru nejčastější a nejobvyklejší;
- byly uvedeny i důležité vzorce souvisejících disciplín (např. ze statistiky, teorie pravděpodobnosti, demografie aj.) a přehled tak byl do určité míry soběstačný.

Matematická úroveň vzorců a metod se pohybuje od velmi jednoduchých zvládnutelných pomocí základů středoškolské matematiky až po velmi sofistikované záležitosti z oblasti matematicky orientovaných vysokoškolských studií (např. stochastický kalkulus aj.). Autor doufá, že uživatel nalezne v přehledu právě „svůj stupeň obtížnosti“ odpovídající problematice, o kterou se zajímá. Do textu jsou zařazeny „Matematické repetitorium“ pro případné připomenutí některých matematických základů a pak především partie, které mají určitý vztah (někdy přímý, jindy zprostředkovaný) k finanční a pojistné analýze: „Teorie pravděpodobnosti“, „Popisná a matematická statistika“, „Ekonometrie“, „Indexní teorie“, „Náhodné procesy a časové řady“ a „Stochastický kalkulus“. Pro větší přehlednost je také hned za „Obsahem“ uveden „Seznam některých symbolů“, které se v přehledu vzorců opakují (řada speciálních symbolů je

však vysvětlena až v kontextu odpovídajícího vzorce). Rychlou orientaci v textu by měl usnadnit podrobný rejstřík v závěru publikace.

Práce na publikaci probíhala v rámci grantu GAUK 342/2005 a výzkumného záměru MSM 0021620839.