Stejnoměrná konvergence IV – – řady funkcí 2

10. cvičení

Matematická analýza 3, NMMA201, Ondřej Bouchala

Teorie:

Věta 1 (Abel-Dirichletovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci)
Nechť $a_n(x)$ a $b_n(x)$ jsou posloupnosti funkcí definovaných na intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$. Nechť je posloupnost čísel $b_n(x)$ pro každé $x \in J$ monotónní. Nechť navíc platí (alespoň) jedna z dvojic podmínek:

(A)
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \rightrightarrows$ na J,
- b_n je na J stejně omezena, tedy $\exists K > 0\, \forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in J\colon\ |b_n(x)| \leq K$.

(D)
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má stejně omezené částečné součty, to jest

$$\exists K > 0\, \forall m \in \mathbb{N}\, \forall x \in J\colon\ |s_m(x)| = \left| \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \right| < K,$$

- $b_n \rightrightarrows 0$ na J.

Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \rightrightarrows \quad \text{na } J.$$

Věta 2 (o záměně limity a derivace)
Nechť mají funkce f_n vlastní derivaci na intervalu (a, b) a nechť

(i) existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že posloupnost čísel $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje a

(ii) pro derivace f_n' platí $f_n' \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows}$ na (a, b).

Pak existuje funkce f definovaná na (a, b), pro kterou platí, že $f_n(x) \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f$ na (a, b), f má na (a, b) vlastní derivaci a $f_n' \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f'$ na (a, b).

VĚTA 3 (o záměně sumy a derivace)
Nechť mají funkce u_n vlastní derivaci na intervalu (a,b) a nechť

(i) existuje $x_0 \in (a,b)$ takové, že řada čísel $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ konverguje a

(ii) pro derivace u_n' platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n' \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows}$ na (a,b).

Pak existuje funkce f definovaná na (a,b), pro kterou platí, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x)$, f je lokálně stejnoměrnou limitou částečných součtů na (a,b), f má na (a,b) vlastní derivaci a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'$ lokálně stejnoměrně konverguje k f' na (a,b).

TVRZENÍ 4
Řady $\sum \sin(nx)$ a $\sum \cos(nx)$ mají stejnoměrně omezené částečné součty na $[\delta, 2\pi - \delta]$ pro $\delta > 0$.

Příklady:

Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci následujících řad funkcí:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ na $(-1,\infty)$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n(1-x)x^n$ na $[0,1]$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^s}$ na $\mathbb{R}$ v závislosti na parametru $s \in \mathbb{R}$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} \arctan(nx)$ na $[0,2\pi]$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x)\sin(nx)}{\sqrt{n+x}}$ na $(0,\infty)$

Rozhodněte, jestli jsou následující funkce diferencovatelné na $(-1,\infty)$:

2. $F(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

5. $G(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$

Řešení:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ na $(-1,\infty)$. Zde na první pohled vidíme člen $(-1)^n$, a víme, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ má omezené částečné součty (a na x to nezávisí, a tedy je má stejně omezené). Nabízí se proto Dirichletovo kritérium, kde zvolíme $a_n := (-1)^n$ a $b_n(x) = \frac{1}{n+x}$.

   Zbývá ověřit všechny předpoklady. $a_n(x)$ i $b_n(x)$ jsou na $(-1,\infty)$ pro každé n definovány. Posloupnost b_n je klesající (neboť pro každé x platí $x+n < x+(n+1)$, a tedy $b_n = \frac{1}{x+n} > \frac{1}{x+(n+1)} = b_{n+1}$), a tedy monotónní. Již víme, že $\sum a_n$ má stejně omezené částečné součty. Zbývá, že $b_n \rightrightarrows 0$ na $(-1,\infty)$. Nicméně to už je jednoduché, neboť

$$\sigma_n := \sup_{x\in(-1,\infty)} |b_n(x)| = \sup_{x\in(-1,\infty)} \left|\frac{1}{n+x}\right| \leq \frac{1}{n-1} \to 0.$$

   (Viz 7. cvičení.)

   Tedy z Dirichletova kritéria plyne, že zadaná řada konverguje stejnoměrně na intervalu $(-1,\infty)$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ na $[0,1]$. Opět vidíme člen $(-1)^n$, a tak zase zkusíme Dirichleta. Volme $a_n := (-1)^n$ a $b_n(x) := (1-x)x^n$. Opět ověříme podmínky:

   Funkce a_n a b_n jsou na $[0,1]$ definovány. Potřebujeme, aby b_n byla pro každé x monotónní. Pro x rovno nule nebo jedné jde o konstantní posloupnost $b_n(0) = b_n(1) = 0$, tedy to monotónní je. Pro $x \in (0,1)$ víme, že je posloupnost x^n klesající, tedy bude klesat i $(1-x)x^n$. (Případně zderivujeme podle n a ukážeme totéž.) Omezenost částečných součtů a_n již víme. Zbývá, že $b_n \rightrightarrows 0$ na $[0,1]$.

   Nuže počítejme (opět viz 7. cvičení). Vyšetřujeme extrém, derivací zjistíme (pro $n > 1$)

$$\frac{\partial b_n}{\partial x}(x) = -(n(x-1)+x)x^{n-1}.$$

   Tedy máme nulovou derivaci v bodě 0 a $\frac{n}{n+1}$. Navíc $[0,1]$ je kompakt, a tedy se tam maxima nabývat musí ($|b_n|$ je spojitá). Dosazením zjistíme, že v krajních bodech se maxima nenabývá, a nabývá se ho v bodě $\frac{n}{n+1}$. Tedy

$$\sigma_n := \sup_{x\in[0,1]} |b_n(x)| = b_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(1-\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n,$$

   a z věty o aritmetice limit

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 0 \cdot \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 0 \cdot \frac{1}{e} = 0.$$

   Neboli $b_n \rightrightarrows 0$, a tedy díky Větě 1 zadaná řada konverguje

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^s}$ na $\mathbb{R}$ v závislosti na parametru $s \in \mathbb{R}$. Nejprve si všimneme, že pro $s > 1$ řada konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ díky Weierstrassova kritéria ($a_n = \frac{1}{n^s}$).

   Pro $s \leq 0$ není splněna nutná podmínka konvergence. No a pro $0 < s \leq 1$ zadaná řada nekonverguje v bodech $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ale konverguje lokálně stejnoměrně na intervalech $(2k\pi, 2(k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Lokální konvergenci lehce odvodíme z Dirichletova kritéria, kde volíme $a_n(x) := \cos(nx)$ a $b_n := \frac{1}{n^s}$. Víme, že na libovolném uzavřeném intervalu uvnitř $(2k\pi, 2(k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ má a_n stejnoměrně omezené částečné součty (Tvrzení 4). A řada b_n jde zřejmě monotónně k nule (pro $s > 0$, a jelikož b_n nezávisí na x tak je to stejnoměrné).

Zbývá zdůvodnit, proč je konvergence jen lokálně stejnoměrná a ne stejnoměrná. Jde třeba použít argument, že zadaná řada nesplňuje Bolzano-Cauchyho podmínku, neboť (označme $u_n(x) := \frac{\cos(nx)}{n^s}$) pro každé n_0 platí

$$\begin{aligned}\sum_{n=n_0}^{2n_0} u_n\left(\frac{1}{2n_0}\right) &= \sum_{n=n_0}^{2n_0} \frac{\cos\left(\frac{n}{2n_0}\right)}{n^s} \geq \\ &\geq \sum_{n=n_0}^{2n_0} \frac{\cos(1)}{(2n_0)^s} = \\ &= n_0 \frac{\cos(1)}{(2n_0)^s} = 2^{-s} n_0^{1-s} \cos(1) \geq \\ &\geq 2^{-s} \cos 1.\end{aligned}$$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} \arctan(nx)$ na $[0, 2\pi]$. Tato řada konverguje lokálně stejnoměrně. Z předchozího příkladu 4 víme, že na $[\delta, 1-\delta]$ konverguje řada $\frac{\cos(nx)}{n}$ stejnoměrně. A posloupnost funkcí $\arctan(nx)$ je pro každé x monotónní, a je stejnoměrně omezena $(\frac{\pi}{2})$.

   Tedy z Abelova kritéria (Věta 1) plyne, že je zadaná řada stejnoměrně konvergentní na $[\delta, 1-\delta]$, a tedy lokálně stejnoměrně konvergentní na $(0, 2\pi)$.

   Zbývá argument, proč není stejnoměrně konvergentní na celém intervalu. Podobně jako minule najdeme spor s Bolzano-Cauchyho podmínkou.

$$\sum_{n=n_0}^{2n_0} u_n\left(\frac{1}{2n_0}\right) \geq n_0 \frac{\cos(1)}{2n_0} \frac{\pi}{2} \geq \pi \cos 1.$$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x)\sin(nx)}{\sqrt{n+x}}$ na $(0, \infty)$. Zde jen výsledek a nápověda – Tato řada konverguje stejnoměrně, lze použít Dirichletovo kritérium s $a_n(x) := \sin x \sin nx$. Lze ukázat, že částečné součty a_n jsou stejně omezeny, a to i u 0.

2. $F(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$. Zde postupujeme podle Věty 3. Označme $u_n(x) := \frac{(-1)^n}{n+x}$. Tyto funkce jsou na intervalu $(-1, \infty)$ dobře definované, a mají tam vlastní derivaci,

$$u_n'(x) = -\frac{(-1)^n}{(n+x)^2}.$$

   Dále pak

   (i) Potřebujeme bod x_0 tak, aby řada čísel $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x_0}$ konvergovala. Buď zvolíme třeba $x_0 := 0$, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje třeba z Leibnizova kritéria, nebo si všimneme že tato řada konverguje pro každé $x \in (-1, \infty)$ – to plyne z příkladu 1.

(ii) Potřebujeme lokálně stejnoměrnou konvergenci řady derivací, to jest chceme

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{(n+x)^2} \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} \quad \text{na } (-1,\infty).$$

To ale okamžitě plyne z Weierstrassova kritéria – na $[-1+\delta,\infty)$ máme $|u_n'(x)| \leq \frac{1}{(n-1+\delta)^2}$, což je konvergentní řada.

Tedy Věta 3 říká, že F má na intervalu $(-1,\infty)$ derivaci.

5. $G(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$. Zde můžeme buď opět ověřit předpoklady Věty 3, a nebo si můžeme všimnout, že $G(x) = xF(x)$, tedy jde o součin dvou diferencovatelných funkcí a tedy o diferencovatelnou funkci.