Stejnoměrná konvergence II – posloupnosti funkcí 2

8. cvičení

Matematická analýza 3, NMMA201, Ondřej Bouchala

Teorie:

Věta 1 (Kritérium stejnoměrné konvergence)
Nechť J je interval a f_n a f jsou funkce z J do $\mathbb{R}$. Označme

$$\sigma_n := \sup\{|f_n(x) - f(x)|:\ x \in J\}.$$

Pak $f_n \rightrightarrows f$, právě tehdy když $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

Věta 2 (Moore-Osgood, spojitost)
Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na J a nechť f_n jsou spojité na J. Pak je f spojitá na J.

Věta 3 (Diniho věta)
Nechť $K \subseteq \mathbb{R}^m$ je kompaktní množina. Nechť $\{f_n\}:\ K \to \mathbb{R}$ je monotónní posloupnost spojitých funkcí (tj. pro každé $x \in K$ je posloupnost $\{f_n(x)\}$ monotónní). Nechť $\{f_n\}$ bodově konverguje ke spojité funkci $f:\ K \to \mathbb{R}$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na K.

Příklady:

Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností funkcí:

1. $f_n(x) := e^{n(x-1)}$ na $(0, 1)$
2. $f_n(x) := \sin(\pi x^n)$ na $[0, 1]$
3. $f_n(x) := \frac{nx}{1+n+x}$ na $(0, \infty)$
4. $f_n(x) := nxe^{-nx^2}$ na $\mathbb{R}$
5. $f_n(x) := \dfrac{\log nx}{n}$ na $(0, \infty)$
6. $*$ $f_n(x) := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ na $[0, \infty)$
7. $*$ $f_n(x) := x \arctan(nx)$ na $\mathbb{R}$

Řešení:

1. $f_n(x) := e^{n(x-1)}$ na $(0,1)$. Nejprve vyšetříme bodovou konvergenci. Zcela standardně pomocí věty o limitě složené funkce a Heineho věty dostaneme, že bodově se f_n blíží k nule ($f(x) = 0$).

   Dále vyšetřujeme stejnoměrnou konvergenci, a sice dokážeme, že stejnoměrně nekonverguje. Buď si spočítáme, že $\sigma_n = 1$, nebo použijeme Moore-Osgoodovu větu – platí, že $\lim_{x\to1^-} f_n(x) = 1$, ale $\lim_{x\to1^-} f(x) = 0$, a tedy konvergence nemůže být stejnoměrná.

   Zbývá vyšetřit lokálně stejnoměrnou konvergenci. Chtěli bychom dokázat, že pro daný interval $[a,b] \subseteq (0,1)$ platí, že na něm $f_n \rightrightarrows f$. Buď použijeme Diniho větu (ukázat monotonii je jednoduché), nebo spočítáme, že $\sigma_n = e^{-n(1-b)}$, tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

   Takže $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$, a tedy $f_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f$ na $(0,1)$.

2. $f_n(x) := \sin(\pi x^n)$ na $[0,1]$. Opět začneme bodovou konvergencí. Zjevně $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = \sin(\pi) = 0$. A pro $x \in [0,1]$ máme $\lim\limits_{n\to\infty} \pi x^n = 0$, a tedy z Věty o limitě složené funkce, spojitosti sinu a Heineho věty dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 =: f(x).$$

   Stejnoměrná však tato konvergence není. Pomocí derivace zjistíme, že

$$\sigma_n = \sup_{x\in[0,1]} \{f_n(x)\} = \sin\left(\pi\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)^n\right) = 1.$$

   Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 1$.

   Poznamenejme, že nemusíme vyšetřovat zdali se v bodech $x_n := \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ opravdu nabývá maxima, stačí si uvědomit, že

$$\sup_{x\in[0,1]} \{f_n(x)\} \geq f_n(x_n) = 1,$$

   což nám k závěru $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n \neq 0$ stačí.

   Rovnou můžeme prohlásit, že na intervale $[0,1]$ posloupnost f_n nekonverguje ani lokálně stejnoměrně. Pak by totiž musela konvergovat stejnoměrně na každém uzavřeném podintervale, a stačí zvolit původní interval $[0,1]$. Dokonce platí, že na kompaktní množině pojmy stejnoměrné a lokální stejnoměrné konvergence splývají.

   Nicméně na nějaké menší množině by pořád ještě f_n mohly lokálně stejnoměrně konvergovat. Kde je problém nám napoví body x_n, které jsme použili na vyvrácení stejnoměrné konvergence. Platí $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, tedy se dá tušit, že problém bude s bodem 1. Vskutku libovolné okolí 1 obsahuje od nějakého n_0 body $\{x_n\}_{n=n_0}^{\infty}$, a tedy by na něm nemohla být konvergence stejnoměrná.

   Nicméně když 1 odstraníme, pak už $f_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f$ na $[0,1)$. Vskutku, uvažujme libovolné $c \in (0,1)$. Na intervale $[0,c]$ posloupnost f_n konverguje stejnoměrně, neboť pro $x \in [0,c]$ je $\sin(\pi x^n) \leq \pi x^n \leq \pi c^n$, a $\pi c^n \to 0$. Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,c]$.

Nechť je dán interval $[a,b] \subseteq [0,1)$. Pak existuje takové c, aby $[a,b] \subseteq [0,c)$ (třeba $c = \frac{1+b}{2}$). A jelikož $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,c]$, tak tím spíš $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$. Což dokazuje lokálně stejnoměrnou konvergenci na intervale $[0,1)$.

3. $f_n(x) := \frac{nx}{1+n+x}$ na $(0,\infty)$. Bodová konvergence je triviální, f_n bodově konvergují k funkci $f(x) := x$.

   Vyšetřujme stejnoměrnou konvergenci. Njprve si všimneme, že

$$f(x) = x = \frac{nx}{x} \geq \frac{nx}{1+n+x} = f_n(x).$$

   Tedy $|f_n(x) - f(x)| = f(x) - f_n(x)$. A

$$f(x) - f_n(x) = \frac{x + nx + x^2}{1+n+x} - \frac{nx}{1+n+x} = \frac{x^2+x}{1+n+x}.$$

   Triviálně $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{1+n+x} = \infty = \sigma_n$, a tedy to nekonverguje stejnoměrně.

   Nicméně konvergence je lokálně stejnoměrná. Nechť $[a,b] \subseteq (0,\infty)$. Pak

$$\sigma_n = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,b]} \frac{x^2+x}{1+n+x} \leq \frac{b^2+b}{1+n} \to 0,$$

   tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$ a tedy $f_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f$ na $(0,\infty)$.

4. $f_n(x) := nxe^{-nx^2}$ na $\mathbb{R}$. Pro bodovou konvergenci si nejprve uvědomíme, že triviálně $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$, a následně pro $x \neq 0$ použijeme l'Hospitalvo pravidlo (tedy limitu chápeme jako limitu funkce závislé na n s parametrem x)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{e^{nx^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x^2 e^{nx^2}} = 0,$$

   a pak Heineho věta říká, že bodovou limitou funkcí f_n je $0 =: f(x)$.

   Zkoumejme stejnoměrnou konvergenci. Hledáme σ_n. Derivujme:

$$\frac{\partial}{\partial x} nxe^{-nx^2} = ne^{-nx^2} - 2n^2x^2e^{-nx^2} = ne^{-nx^2}(1 - 2nx^2). \tag{1}$$

   Jednoduchým výpočtem zjistíme, že derivace je nulová v bodech $\pm\sqrt{\frac{1}{2n}}$. Mohli bychom ověřit, že se tam nabývá maxima a minima, ale to je zbytečné, neboť

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \left| nxe^{-nx^2} \right| \right\} \geq \\ &\geq n\sqrt{\frac{1}{2n}} e^{-n\left(\sqrt{\frac{1}{2n}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}} \to \infty.\end{aligned}$$

   Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \infty \neq 0$, takže konvergence není stejnoměrná. Dokonce na $\mathbb{R}$ není ani lokálně stejnoměrná, neboť stejného argumentu se dá použít i pro interval $[-1,1]$, neboť $x_n := \sqrt{\frac{1}{2n}} \in [-1,1]$.

Body x_n se blíží k nule, což napovídá že problém bude u nuly. Zkusme tedy vyšetřit lokálně stejnoměrnou konvergenci na $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$. Uvažujme tedy interval $[a,\infty)$ pro $a > 0$. Ze vztahu (1) plyne, že pro dost velká n je $x_n < a$, tedy funkce nxe^{-nx^2} je na $[a,\infty)$ klesající, a tedy $\sigma_n = nae^{-na^2}$, a $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$. Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,\infty)$, tedy $f_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f$ na $(0,\infty)$. Zcela analogicky a symetricky bychom zjistili, že $f_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f$ na $(-\infty,0)$.

5. $f_n(x) := \frac{\log nx}{n}$ na $(0,\infty)$. Bodová konvergence je opět kombinace l'Hospitalova pravidla a Heineho věty:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log nx}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{nx}}{1} = \frac{1}{n} = 0 =: f(x).$$

Konvergence stejnoměrná není, stačí si uvědomit, že pro pevné n čím věší bude x, tím větší bude $|f_n(x) - f(x)|$. Neboli

$$\sigma_n \geq \lim_{x\to\infty} \frac{\log nx}{n} = \infty.$$

Vyšetřujme lokálně stejnoměrnou konvergenci. Mějme interval $[a,b] \subseteq (0,\infty)$. Musíme si dát pozor na absolutní hodnotu. Pro $nx < 1$ je $|\log nx|$ klesající, a pro $nx > 1$ je rostoucí. Tedy formálně to můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sup_{x\in[a,b]} \left\{ \left| \frac{\log nx}{n} \right| \right\} = \\ &= \sup_{x\in[a,b]} \left\{ \max\left\{ \frac{\log nx}{n}, -\frac{\log nx}{n} \right\} \right\} \leq \\ &\leq \max\left\{ \frac{\log nb}{n}, -\frac{\log na}{n} \right\},\end{aligned}$$

neboť log je rostoucí a $-\log$ klesající. Jelikož $\frac{\log nb}{n}$ a $-\frac{\log na}{n}$ jdou k nule, jde k nule i to maximum, a tedy i σ_n. Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$ a $f_n \overset{\text{loc.}}{\rightrightarrows} f$ na $(0,\infty)$.

∗ 6. $f_n(x) := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ na $[0,\infty)$. Zde jen návod/náznak postupu. Pomocí třeba l'Hospitala a Heineho zjistíme, že bodovou limitou je funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$. Konvergence není stejnoměrná, neboť e^x roste u nekonečna rychleji než polynom, tedy

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \infty.$$

Konvergence však je lokálně stejnoměrná. Z odhadu zbytku Taylorova polynomu plyne, že existuje takové $C > 0$ že

$$\left| \frac{\log(1+y)}{y} - 1 \right| \leq Cy$$

pro všechna $0 < y < 1$. Na $[0,K)$ tedy můžeme počítat

$$\left| \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - \mathrm{e}^x \right| = \mathrm{e}^x \left| \mathrm{e}^{\left(\frac{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} - 1\right)x} - 1 \right| \leq \mathrm{e}^K \left(\mathrm{e}^{C\frac{K}{n}K} - 1 \right) \to 0.$$

∗ 7. $f_n(x) := x \arctan(nx)$ na $\mathbb{R}$. Bodová limita je jednoduchá, vyjde $f(x) = \frac{\pi}{2}|x|$. A zde dokonce $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$. Pro důkaz tohoto je třeba odhad na celém intervalu rozdělit na dva odhady, nejprve na $\left[0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ a pak $\left[\frac{1}{\sqrt{n}}, \infty\right)$ (plus samozřejmě symetricky $\left[-\frac{1}{\sqrt{n}}, 0\right]$ a $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$).

Pokud $x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, pak stačí odhad

$$\left|x \arctan(nx) - \tfrac{\pi}{2}x\right| = \left|x\left(\arctan(nx) - \tfrac{\pi}{2}\right)\right| \le \frac{1}{\sqrt{n}}\pi \to 0.$$

Na $\left[\frac{1}{\sqrt{n}}, \infty\right)$ je třeba odhadnout, jak rychle jde arctan k $\frac{\pi}{2}$. Pro to pomocí l'Hospitala spočítáme limitu

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan y}{\frac{1}{y}} = 1.$$

Pak už můžeme pro $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, \infty\right)$ odhadnout

$$\left|x \arctan(nx) - \tfrac{\pi}{2}x\right| \le x\frac{C}{nx} = \frac{C}{n} \to 0.$$