Stejnoměrná konvergence I – posloupnosti funkcí 1

7. cvičení

Matematická analýza 3, NMMA201, Ondřej Bouchala

Teorie:

Věta 1 (Kritérium stejnoměrné konvergence)
Nechť J je interval a f_n a f jsou funkce z J do $\mathbb{R}$. Označme

$$\sigma_n := \sup\{|f_n(x) - f(x)|:\ x \in J\}.$$

Pak $f_n \rightrightarrows f$, právě tehdy když $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

Věta 2 (Moore-Osgood, spojitost)
Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na J a nechť f_n jsou spojité na J. Pak je f spojitá na J.

Příklady:

Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností funkcí:

1. $f_n(x) := \dfrac{x^n}{1 + x^n}$ na $[0, 1]$
2. $f_n(x) := x^n - x^{2n}$ na $[0, 1]$
3. $f_n(x) := \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ na
   a) $[-100, 100]$
   b) $\mathbb{R}$
4. $f_n(x) := n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$ na $(0, \infty)$
5. $f_n(x) := \sqrt[n]{1 + x^n}$ na $[0, \infty)$
6. $f_n(x) := n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ na
   a) $[1, 100]$
   b) $[1, \infty)$

Řešení:

1. $f_n(x) := \dfrac{x^n}{1+x^n}$ na $[0,1]$. Bodová konvergence je snadná, pro $x < 1$ to konverguje k 0 a pro $x = 1$ k $\frac{1}{2}$ (věta o aritmetice limit), tedy

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ \frac{1}{2}, & x = 1. \end{cases}$$

Tedy f_n konvergují bodově k f. Nicméně tato konvergence není stejnoměrná. Buď si uvědomíme, že je to ve sporu s Větou 2, neboť f_n jsou spojité a f spojitá není, nebo použijeme Větu 1 a spočteme, že

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|\colon\ x \in [0,1]\} = \frac{1}{2}.$$

2. $f_n(x) := x^n - x^{2n}$ na $[0,1]$. Nejprve spočtěme bodovou limitu. Zafixujme tedy x, a upravujme: $\lim\limits_{n\to\infty} x^n(1-x^n) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(1-x^n)$. Je-li $x < 1$, pak je to součin $0 \cdot 1$, a pro $x = 1$ je to $1 \cdot 0$. Tedy celkem posloupnost f_n bodově konverguje k

$$f(x) = 0.$$

Pro vyšetření stejnoměrné konvergence potřebujeme spočítat σ_n, tedy zafixujme n a počítejme

$$\sigma_n = \sup\{|x^n - x^{2n}|\colon\ x \in [0,1]\} = \sup\{f_n(x)\colon\ x \in [0,1]\}.$$

Interval $[0,1]$ je kompaktní a funkce f_n spojitá, takže se maxima nabývá. V 0 a 1 je $f_n(x)$ rovna nule, jinde je kladná, tedy v krajích mít maximum nebude. Tedy (jelikož jde o hladkou funkci) musí být maximum v bodě, kde je derivace nulová. Počítejme (zajímá nás to pro velká n, klidně tedy můžeme předpokládat $n > 1$)

$$f_n(x)' = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = x^{n-1}\left(n - 2nx^n\right).$$

Tedy první podezřelý bod je 0 (tam již víme, že maximum není), a druhý (a poslední) podezřelý bod je $\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$. Jelikož se maxima nabývat musí, a máme pro něj jen jednu možnost, je maximum v tomto bodě. Po dosazení pak $\sigma_n = \frac{1}{4}$ a tedy posloupnost f_n nekonverguje k f stejnoměrně.

3. $f_n(x) := \sin\left(\frac{x}{n}\right)$. Nejprve bodová limita – z věty o limitě složené funkce (a Heineho věty) plyne, že f_n bodově konvergují k $f(x) = 0$. Vyšetřujme nyní stejnoměrnou konvergenci na intervale $[-100, 100]$. Zafixujme n a hledejme σ_n. Nejprve si uvědomíme, že je funkce $f_n - f = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ lichá, tedy

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x)|\colon\ x \in [-100,100]\} = \sup\{|f_n(x)|\colon\ x \in [0,100]\}.$$

Dále si uvědomíme, že pro dostatečně velká n (což nám stačí, protože s n půjdeme do nekonečna) se interval $[0,100]$ zobrazí pomocí zobrazení $\frac{x}{n}$ do intervalu $[0,\pi]$ (volme třeba $n \geq 100$). Tedy pro tato n je funkce $\sin\left(\frac{x}{n}\right)$ na intervale $[0,100]$ rostoucí a nezáporná. Tedy pro $n \geq 100$ máme

$$\sigma_n = \sup\left\{\sin\left(\frac{x}{n}\right)\colon\ x \in [0,100]\right\} = \sin\left(\frac{100}{n}\right).$$

A víme, že $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{100}{n}\right) = \sin(0) = 0$ (využili jsme toho, že je sinus v nule spojitý, věty o limitě složené funkce a Heineho věty). Tedy na $[-100, 100]$ konvergují f_n stejnoměrně.

Na všech reálných číslech ale stejnoměrně nekonvergují, což je celkem zjevné. Pro dané n stačí zvolit $x := \frac{n\pi}{2}$, tedy $\sigma_n = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

4. $f_n(x) := n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$ na $(0,\infty)$. Zde vidíme rozdíl odmocnin, a tedy nás hned napadne vzoreček $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. Tedy

$$f_n(x) = \frac{n\left(x+\frac{1}{n}-x\right)}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}}.$$

Tedy f_n bodově konvergují k funkci $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Stejnoměrná však tato konvergence není. Nejjednodušší je si asi uvědomit, že funkce $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ není omezená, ale

$$0 \le f(x) \le \frac{1}{\sqrt{0+\frac{1}{n}}+\sqrt{0}} = \sqrt{n}.$$

Tedy pro každé n je $\sigma_n = \infty$.

Nebo prostě dosadíme a počítáme:

$$\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+\frac{1}{n}}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{n}}\right)} = $$
$$= \frac{\frac{1}{n}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{n}}\right)^2},$$

a pro $x \to 0^+$ jde tento výraz k ∞, takže $\sigma_n = \infty$ a máme hotovo.

5. $f_n(x) := \sqrt[n]{1+x^n}$ na $[0,\infty)$. Nejprve jako vždy bodová limita. Rozumná se ukazuje úvaha, že x^n bude pro $x > 1$ tak obrovské, že je ta 1 zanedbatelná, a pro $x < 1$ zase že x^n je zanedbatelné oproti té jedničce. Tedy kandidátem na funkci f je

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1, \\ x, & 1 \le x. \end{cases}$$

Zbývá to dokázat. Mimochodem, jinak se to dá zapsat jako

$$f(x) := \max\{1, x\}.$$

Pro $x = 1$ jde o limitu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$, takže je to jednoduché. Ve zbylých případech použijeme větu o dvou policajtech. Pro $x < 1$ platí, že $x^n < 1^n$, a tedy

$$1 \le 1 + x^n \le 2.$$

Takže

$$1 \le \sqrt[n]{1+x^n} \le \sqrt[n]{2}.$$

Levá i pravá strana jdou k jedné, a tedy jde k jedné i $f_n(x) := \sqrt[n]{1+x^n}$.

Pro $x > 1$ platí podobně odhad

$$x \leq \sqrt[n]{1+x^n} \leq \sqrt[n]{2x^n} = \sqrt[n]{2}x. \tag{1}$$

Opět obě strany jsou k x, a tedy máme vyhráno. Zde jsme, jako tomu často u limit s n-tými odmocninami bývá, využili faktu, že tyto odmocniny žerou konstanty.

Tato konvergence je navíc stejnoměrná. Odhad pro σ_n provedeme zvlášť pro $x < 1$ a $x \geq 1$. Ještě před výpočtem si uvědomíme, že $f_n(x) \geq f(x)$, čímž se zbavíme absolutní hodnoty. Je-li $x < 1$, pak $f_n(x) - f(x) = \sqrt[n]{1+x^n} - 1 \leq \sqrt[n]{2} - 1 \to 0$.

Je-li $x < 1$, pak odhad (1) nestačí, neboť bychom dostali $\left(\sqrt[n]{2}-1\right)x$, což pořád na x závisí. Musíme tedy použít vztahu $(a^n - b^n) = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b \cdots + b^{n-1}\right)$, dostaneme

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{1+x^n} - x &= \frac{\left(\sqrt[n]{1+x^n}\right)^n - x^n}{\left(\sqrt[n]{1+x^n}\right)^{n-1} + \left(\sqrt[n]{1+x^n}\right)^{n-2} x + \cdots + x^{n-1}} \leq \\ &\leq \frac{1}{n} \to 0.\end{aligned}$$

Tedy, kdybychom to chtěli dohromady, tak $\sigma_n \leq \max\left(\sqrt[n]{2}-1, \frac{1}{n}\right)$, a tedy jde vskutku o stejnoměrnou konvergenci.

Poznamenejme ještě, že tento důkaz pro stejnoměrnou konvergenci pomocí rozvoje $a^n - b^n$ funguje i jako důkaz bodové konvergence.

6. $f_n(x) := n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$. Nuže počítejme bodovou limitu. Nemáme-li nápad, pak konvergenci $n \to \infty$ chápeme nejprve jako limitu funkce závislé na $n \in [1, \infty)$, abychom mohli použít l'Hospitala:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}\log(x)} - 1}{\frac{1}{n}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\log(x)\frac{-1}{n^2}e^{\frac{1}{n}\log(x)}}{-\frac{1}{n^2}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \log(x)x^{\frac{1}{n}} = \log(x)1.\end{aligned} \tag{2}$$

Tedy bodovou limitou je $f = \log x$ (z výpočtu plyne, že l'Hospitala můžeme použít, a použijeme Heineho větu abychom dostali zpátky konvergenci posloupnosti).

Na intervalu $[1, 100]$ funkce f_n konvergují stejnoměrně. Jedna z možností jak to ukázat je spočítat σ_n. Všimneme si, že čím máme x víc vpravo, tím víc se funkce log vzdaluje od libovolné odmocniny. Tedy formálně $n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right) - \log x$ je rostoucí na $(1, \infty)$ a v 1 nulová. To, že je to rostoucí ověříme derivací (tentokráte podle x):

$$\left(n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right) - \log x\right)' = n\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right) > 0$$

Hodnota v 1 je jasná. Tedy pro stejnoměrnou konvergenci na $[1, 100]$ dostáváme

$$\sigma_n = \sup_{1\leq x\leq 100} n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right) - \log x = n\left(100^{\frac{1}{n}} - 1\right) - \log 100.$$

Že jde pravá strana k nule plyne třeba z výpočtu (2). (Absolutní hodnota tam není, neboť z vlastností funkce $n\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)-\log x$ které jsme vyšetřili plyne, že je nezáporná.) Tedy vskutku jde o stejnoměrnou konvergenci.

Na intervalu $[1,\infty)$ funkce f_n stejnoměrně nekonvergují. To plyne z toho, že

$$\lim_{x\to\infty} n\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)-\log x=\infty,$$

a tedy $\sigma_n=\infty$. Nebo to jde nahlédnout také konkrétní volbou $x=e^n$. Pak

$$\sigma_n=\sup_{x\geq 1} n\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)-\log x\geq n\left(e^{\frac{n}{n}}-1\right)-n=n(e-2).$$

Tedy $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\infty$ (Věta o anděli), a tedy konvergence nemůže být stejnosměrná.