

Konvergence řad 1

řady s nezápornými členy

4. cvičení

Matematická analýza 2, NMMA102, Ondřej Bouchala

Teorie:

VĚTA 1 (Nutná podmínka konvergence řady)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Rightarrow \lim a_n = 0.$$

VĚTA 2 (Srovnávací kritérium)

Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti s nezápornými členy. Nechť od nějakého členu počínaje je $a_n \leq b_n$. Potom

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverguje}$$

VĚTA 3 (Limitní srovnávací kritérium)

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s nezápornými členy, $\{b_n\}$ posloupnost s kladnými členy. Nechť $\lim \frac{a_n}{b_n} = K$. Potom

$$(i) K \in (0, \infty), \text{ pak } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje.}$$

$$(ii) K = 0, \text{ pak } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje.}$$

$$(iii) K = \infty, \text{ pak } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje.}$$

VĚTA 4 (Cauchyho odmocninové kritérium)

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s nezápornými členy. Potom

$$(i) \lim \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje.}$$

$$(ii) \lim \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje.}$$

VĚTA 5 (d'Alambertovo podílové kritérium)

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s kladnými členy. Potom

$$(i) \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje.}$$

$$(ii) \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje.}$$

Příklady:

Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 3n + 4}{2n^2 + 5}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 5} - \sqrt[3]{n^2 + 1}}{\sqrt[4]{n}}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n^2}$$

$$9. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{2^n - 2n}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n n}{3^n + (-1)^n n}$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^3 - 1})$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{4^n + 5^n}$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 3n + 4}{(2n^2 + 5)^2}$$

Určete, pro která $z \in \mathbb{R}$ je uvedená řada konvergentní.

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n$$

$$17. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} z^n$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

$$20. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}$$