Taylorovy polynomy 3

Limity, odhady

3. cvičení

Matematická analýza 2, NMMA102, Ondřej Bouchala

Teorie:

Věta 1 (Lagrangeův tvar zbytku)
Nechť $a, x \in \mathbb{R}$, nechť má f vlastní $(n+1)$-ní derivaci v každém bodě intervalu $[a, x]$. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) = T_n^{f,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Příklady:

Spočtěte limity pomocí Taylorových polynomů:

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$
14. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$
15. $\lim\limits_{x\to\infty} \left((x^3 - x^2 + \frac{x}{2})e^{1/x} - \sqrt{x^6+1}\right)$

U následujících příkladů nalezněte $n \in \mathbb{N}$ tak, aby limita byla konečná a nenulová.

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(\sin x) - \sin(\tan x)}{x^n}$
17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^x - 1}{x^n}$
18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos(\tan x)}{x^n}$
19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^n}$

20. Najděte $a, b \in \mathbb{R}$, aby $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - (a + b\cos x)\sin x}{x^4} = 0.$
21. Najděte $a, b \in \mathbb{R}$, aby $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - a\sin x - b\tan x}{x^4} = 0$
    a spočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - a\sin x - b\tan x}{x^5}$.

Nalezněte racionální odhady uvedených čísel s předepsanou přesností:

22. $\sqrt{e}, \quad 10^{-2}$
23. $\sqrt{5}, \quad 10^{-3}$
24. $e, \quad 10^{-3}$

Taylorovy polynomy 3
Limity, odhady
3. cvičení

Matematická analýza 2, NMMA102, Ondřej Bouchala

Výsledky:

Spočtěte limity pomocí Taylorových polynomů:

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5}\right) = \mathbf{\frac{1}{3}}$

14. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right) = -\mathbf{\frac{1}{4}}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty} \left((x^3 - x^2 + \frac{x}{2})\mathrm{e}^{1/x} - \sqrt{x^6+1}\right) = \mathbf{\frac{1}{6}}$

U následujících příkladů nalezněte $n \in \mathbb{N}$ tak, aby limita byla konečná a nenulová.

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(\sin x) - \sin(\tan x)}{x^{\mathbf{7}}} = \dfrac{1}{30}$

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^x - 1}{x^{\mathbf{2}}} = 1$

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos(\tan x)}{x^{\mathbf{4}}} = \dfrac{1}{3}$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e} - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^{\mathbf{1}}} = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$

20. Najděte $a, b \in \mathbb{R}$, aby $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - (a + b\cos x)\sin x}{x^4} = 0$. $\boldsymbol{a} = \mathbf{\frac{4}{3}}$, $\boldsymbol{b} = -\mathbf{\frac{1}{3}}$.

21. Najděte $a, b \in \mathbb{R}$, aby $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - a\sin x - b\tan x}{x^4} = 0$
    a spočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - a\sin x - b\tan x}{x^5}$.
    $\boldsymbol{a} = \mathbf{\frac{2}{3}}$, $\boldsymbol{b} = -\mathbf{\frac{1}{3}}$, zadaná limita je rovna $-\mathbf{\frac{1}{20}}$