Krejčího mnohočleny

1. cvičení

Matematická analýza 2, NMMA102, Ondřej Bouchala

Teorie:

Definice 1

Nechť je f funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a nechť má funkce f v bodě a vlastní n-tou derivaci. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^n(a)(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem** funkce f v bodě a řádu n.

Použijeme-li úmluvu $(x-a)^0 = 1$, $f^{(0)} = f$, pak $T_n^{f,a}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(x-a)^j$.

Definice 2

Nechť f a g jsou funkce, $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$ (funkce f je v bodě a malé o od g), pokud

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Věta 3 (Peanův tvar zbytku)

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ a P je polynom stupně nejvýše n. Pak $f(x) - P(x) = o\left((x-a)^n\right)$, $x \to a$, právě tehdy když $P = T_n^{f,a}$.

Věta 4 (Aritmetika malého o)

Platí (ke všem výrazům s malým o je třeba dopsat $x \to a$):

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= o(g(x)) \\ f_2(x) &= o(g(x)) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$$

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= o(g_1(x)) \\ f_2(x) &= o(g_2(x)) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f_1(x) f_2(x) = o\big(g_1(x) g_2(x)\big)$$

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= o(g_1(x)) \\ f_2 \text{ je nenulová na } & P(a,\varepsilon) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f_1(x) f_2(x) = o(g_1(x) f_2(x))$$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= o(g_1(x)) \\ \lim_{x \to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} &\in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) = o(g_2(x))$$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= o(g(x)) \\ h \text{ je omezená na } & P(a,\varepsilon) \end{aligned}\right\} \Rightarrow h(x) f(x) = o(g(x))$$

$$\left.\begin{aligned} m, n \in \mathbb{N}_0,\ & m \le n \\ f(x) = o\left((x-a)^n\right) & \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) = o\left((x-a)^m\right)$$

VĚTA 5

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $f(y) = o(g(y))$, $y \to b$, $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$. Nechť

$$\exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in P(a,\delta)\colon\ \varphi(x) \neq b.$$

Potom

$$f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x))),\ x \to a.$$

Příklady:

Nalezněte Taylorův polynom k-tého řádu v bodě 0 pro funkce:

1. $\tan x$, $k = 4$
2. $\cos(\sin x)$, $k = 5$
3. $\sin(\sin x)$, $k = 6$
4. $\sin(1 - \cos x)$, $k = 3$

Nalezněte Taylorův polynom třetího řádu pro danou funkci v daném bodě.

5. $x \log x$, $\quad 1$
6. $\sin x$, $\quad \frac{\pi}{2}$

Spočtěte limity pomocí Taylorových polynomů:

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$
10. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)$

Krejčího mnohočleny

1. cvičení

Matematická analýza 2, NMMA102, Ondřej Bouchala

Výsledky:

Nalezněte Taylorův polynom k-tého řádu v bodě 0 pro funkce:

1. $\tan x$, $k = 4$: $\quad x + \frac{1}{3}x^3$
2. $\cos(\sin x)$, $k = 5$: $\quad 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4$
3. $\sin(\sin x)$, $k = 6$: $\quad x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5$
4. $\sin(1 - \cos x)$, $k = 3$: $\quad \frac{1}{2}x^2$

Nalezněte Taylorův polynom třetího řádu pro danou funkci v daném bodě.

5. $x \log x, \quad 1$: $\quad x - 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3$
6. $\sin x, \quad \frac{\pi}{2}$: $\quad 1 - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2$

Spočtěte limity pomocí Taylorových polynomů:

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4} = -\frac{1}{12}$
8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1 + x)}{x^3} = \frac{1}{3}$
9. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} \right) = 0$
10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{\cos x}{\sin x} \right) = \frac{1}{3}$