Uzavřené a otevřené množiny

2. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Teorie:

Definice

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Bod $x \in M$ nazveme **vnitřním bodem množiny M**, pokud existuje $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subseteq M$. Množinu všech vnitřních bodů značíme $\operatorname{Int} M$.
Dále, **množina hraničních bodů množiny M** je

$$H(M) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \left[\forall r > 0 \colon \underline{B(x, r) \cap M \neq \emptyset} \wedge \underline{B(x, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset} \right] \right\}.$$

Uzávěr množiny M je pak definován jako $\overline{M} := M \cup H(M)$.
Dále pro $x \in \mathbb{R}^n$ definujme **vzdálenost bodu x od množiny M** jako

$$\varrho(x, M) := \inf\{\varrho(x, y) \colon y \in M\}$$

Věta (Definice uzavřené množiny)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

- $H(M) \subseteq M$
- $\overline{M} = M$
- $\left(\{x_n\} \subseteq M,\ x_n \to x \in \mathbb{R}^n\right) \Rightarrow x \in M$
- $M = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \varrho(x, M) = 0\}$
- $\mathbb{R}^n \setminus M$ je otevřená.

Splňuje-li množina M libovolnou z nich, říkáme o ní že je **uzavřená**.
Navíc, pro $M \subseteq \mathbb{R}^n$ platí, že $\overline{M} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \varrho(x, M) = 0\}$.

Věta (Definice otevřené množiny)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

- $\forall x \in M\, \exists r > 0 \colon B(x, r) \subseteq M$
- $\operatorname{Int} M = M$
- $\mathbb{R}^n \setminus M$ je uzavřená.

Splňuje-li množina M libovolnou z nich, říkáme o ní že je **otevřená**.

Příklady:

1. Nechť $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná konečná. Je pak F otevřená/uzavřená? Jak vypadá $H(F), \overline{F}$ a $\operatorname{Int} F$?

2. U následujících množin rozhodněte, zdali jsou otevřené, zdali jsou uzavřené, a popište jak vypadá $H(F), \overline{F}$ a $\operatorname{Int} F$:

   a) $M := \left\{\frac{1}{n}\colon\ n \in \mathbb{N}\right\}$

   b) $M := \left\{\frac{1}{n}\colon\ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$

   c) $M := \mathbb{N}$

   d) $M := \mathbb{Q}$

   e) $M := \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2\colon\ x > 0, y \leq 0\right\}$

   f) $M := \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2\colon\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\right\}$

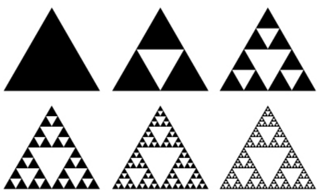
   g) $M := \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2\colon\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\}$

   h) $M := \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2\colon\ |x - y| = x - y\right\}$

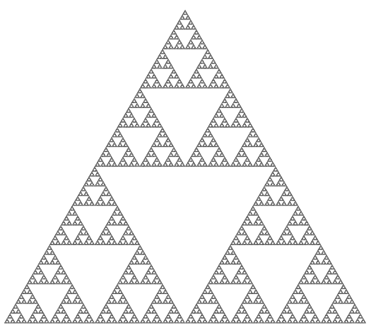
3. Existuje množina, která je otevřená i uzavřená?

∗ 4. Popište všechny podmnožiny $\mathbb{R}^n$, které jsou otevřené i uzavřené.

∗ 5. Sierpińského těsnění je fraktál definovaný jako průnik do sebe vnořených množin S_i, tedy $S := \bigcap_{k=1}^{\infty} S_i$, kde S_1 je trojúhelník, a S_{n+1} dostaneme z S_n odstraněním „prostředních otevřených trojúhelníků". Je to vidět z obrázků (S_1 až S_6):



Celkem pak dostaneme množinu S:



Je S otevřená, případně uzavřená množina? Jak vypadají $H(S), \overline{S}$ a $\operatorname{Int} S$?

Uzavřené a otevřené množiny

1. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Výsledky:

1. F je uzavřená, není otevřená. $H(F) = \overline{F} = F$, $\operatorname{Int} F = \emptyset$.

2. a) Není uzavřená ani otevřená, $H(M) = \overline{M} = M \cup \{0\}$, $\operatorname{Int} M = \emptyset$.

   b) Je uzavřená, není otevřená, $H(M) = \overline{M} = M$, $\operatorname{Int} M = \emptyset$.

   c) Je uzavřená, není otevřená, $H(M) = \overline{M} = M$, $\operatorname{Int} M = \emptyset$.

   d) Není uzavřená ani otevřená, $H(M) = \overline{M} = \mathbb{R}$, $\operatorname{Int} M = \emptyset$.

   e) Není uzavřená ani otevřená, $H(M) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\colon\ (x = 0 \wedge y \leq 0) \vee (y = 0 \wedge x \geq 0)\}$.
   $\overline{M} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\colon\ x \geq 0, y \leq 0\}$. $\operatorname{Int}(M) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\colon\ x > 0, y < 0\}$.

   f) Je otevřená, není uzavřená. $H(M) = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2\colon\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\}$,
   $\overline{M} = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2\colon\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}$, $\operatorname{Int}(M) = M$.

   g) Je uzavřená, není otevřená. $H(M) = \overline{M} = M$, $\operatorname{Int}(M) = \emptyset$.

   h) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\colon\ x \geq y\}$. Tedy M je uzavřená, není otevřená.
   $H(M) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\colon\ x = y\}$, $\overline{M} = M$, $\operatorname{Int}(M) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\colon\ x > y\}$.

3. Jediné takové podmnožiny $\mathbb{R}^n$ jsou $\emptyset$ a $\mathbb{R}^n$.

Parciální derivace

3. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Příklady:

1. Spočtěte parciální derivace následujících funkcí všude, kde existují:

a) $x^m y^n$

b) e^{xy}

c) $xy + yz + zx$

d) $\sqrt{x^2 + y^2}$

e) $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$

f) $|x| \cdot |y|$

g) $\sqrt[3]{xy}$

h) $|y - \sin x|$

i) $|\sin y - \sin x|$

j) $\sqrt[3]{x + y^2}$

k) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y} \cdot \ln(x^2 + y^2)$, $f(0, 0) = 0$

l) $f(x, y) = e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}}$, $f(0, 0) = 0$

m) $\left(\frac{x}{y}\right)^z$

n) $x^{\frac{y}{z}}$

o) x^{y^z}

Parciální derivace

3. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Výsledky:

1. a) $\frac{\partial f}{\partial x} = mx^{m-1}y^n$, $\frac{\partial f}{\partial y} = nx^m y^{n-1}$ pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   b) $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$ pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   c) $\frac{\partial f}{\partial x} = y + z$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x + y$, $\frac{\partial f}{\partial z} = x + y$ pro $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

   d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, pokud $(x,y) \neq (0,0)$. $\frac{\partial}{\partial x} f(0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neexistují.

   e) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$, pokud $y \neq -x$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,-x)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,-x)$ neexistují pro $x \neq 0$.

   f) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = |y| \operatorname{sign} x$ pro $x \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = |x| \operatorname{sign} y$ pro $y \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pro $y \neq 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x \neq 0$ neexistují.

   g) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}$ pro $x \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}$ pro $y \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pro $y \neq 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x \neq 0$ neexistují.

   h) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\operatorname{sign}(y - \sin x) \cdot \cos x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \operatorname{sign}(y - \sin x)$, pokud $y \neq \sin x$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, \sin x)$ neexistuje pro $x \in \mathbb{R}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2} + k\pi, (-1)^k) = 0$ pro $k \in \mathbb{Z}$. $\frac{\partial}{\partial x} f(x, \sin x)$ neexistuje pro $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

   i) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x \operatorname{sign}(\sin x - \sin y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\cos y \operatorname{sign}(\sin x - \sin y)$, pokud $\sin x \neq \sin y$. $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi) = \frac{\partial}{\partial y} f(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi) = 0$. V ostatních bodech parciální derivace neexistují.

   j) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x+y^2}}$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{2y}{3\sqrt[3]{x+y^2}}$, pokud $x \neq -y^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(-x^2, x)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(-x^2, x)$ neexistují pro $x \in \mathbb{R}$.

   k) V $(x, -x^2)$ neexistují parciální derivace pokud $x^2 + x^4 \neq 1$, pokud $x^2 + x^4 = 1$, jsou obě parciální derivace nulové.

   l) $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}} \cdot \frac{2x+y}{(x^2+xy+y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}} \cdot \frac{x+2y}{(x^2+xy+y^2)^2}$ pro $(x,y) \neq (0,0)$; v bodě $(0,0)$ jsou obě parciální derivace nulové.

   m) Pokud $x, y > 0$ nebo $x, y < 0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z}{y} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{zx}{y^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$; $\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \cdot \log \frac{x}{y}$.

   n) Pokud $x > 0$ a $y \neq 0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{z} \cdot x^{\frac{y}{z}-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{\frac{y}{z}} \cdot \log x \cdot \frac{1}{z}$; $\frac{\partial f}{\partial z} = -x^{\frac{y}{z}} \cdot \log x \cdot \frac{y}{z^2}$.

   o) Pokud $x, y > 0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x} = y^z \cdot x^{y^z-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{y^z} \cdot \log x \cdot zy^{z-1}$; $\frac{\partial f}{\partial z} = x^{y^z} \cdot \log x \cdot y^z \cdot \log y$.

Všehochuť funkcí více proměnných

4. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Příklady:

1. Spočtěte parciální derivace funkce $|y - \cos x|$ všude, kde existují. Určete, jak vypadá tečná nadrovina v bodech $(0, 0)$ a $\left(\frac{\pi}{3}, 42\right)$.

2. Uvažujme funkci
$$f(x, y) := \frac{\sqrt{4(3-x) - 3y}}{\log y}\sqrt{\arctan x}.$$
   a) Určete definiční obor funkce f a načrtněte ho.
   b) Rozhodněte, zdali je ten definiční obor omezená množina v $\mathbb{R}^2$. Dokažte to.

$*$ 3. Nechť
$$G(x, y, z) = \left(x^2 \cdot e^z + \sin(x \cdot y), x, x \cdot z - y, x + 2y^4 + z^{17}\right),$$
$$F(t, u, v, w) = u + uv - \sin(vw) + ut + u \cdot v \cdot w.$$
   a) Spočítejte všechny parciální derivace funkce $F \circ G$.
   b) Určete rovnice tečné nadroviny v nule (v $(0, 0, 0)$).

4. Určete body, které by mohly být lokálním nebo globálním extrémem funkce
$$x^4 + y^2 + 2z^2 - xy - xz + 2yz + 4y - 2x.$$
(Neboli najděte body, kde je splněna nutná podmínka existence extrému.)

Všehochuť funkcí více proměnných

4. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Výsledky:

1. $\frac{\partial}{\partial x}|y-\cos x| = \sin x \,\mathrm{sign}(y-\cos(x))$, $\frac{\partial}{\partial y}|y-\cos x| = \mathrm{sign}(y-\cos(x))$ pro $y \neq \cos x$, navíc $\frac{\partial}{\partial x}|y-\cos x| = 0$ pro $(1, 2k\pi)$ a $(-1, \pi+2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Jinde jiné parciální derivace neexistují.
   Tečné nadroviny jsou dány popořadě předpisy $-y$ a $\frac{\sqrt{3}}{2}x + y$.

2. Trojúhelník s vrcholy $(0,0), (0,4)$ a $(3,0)$. Hrana x tam je, hrana y tam není. Namíň tam ještě nejsou body, kde $y = 1$. Je to omezená množina.

∗ 3. Parciální derivace jsou

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,z) = {}& 2x^2e^z + x\cos(xy)y + \\ & + 1 + xz - y + x^2e^z + \sin(xy) + (xz-y)(x+2y^4+z^{17}) + \\ & + z\left[x - \cos((xz-y)(x+2y^4+z^{17}))(x+2y^4+z^{17}) + x(x+2y^4+z^{17})\right] + \\ & + x(xz-y) - \cos((xz-y)(x+2y^4+z^{17}))(xz-y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,z) = {}& x^2\cos(xy) - \\ & - \left[x\left(x+2y^4+z^{17}\right) - \left(x+2y^4+z^{17}\right)\cos\left((xz-y)\left(x+2y^4+z^{17}\right)\right) + x\right] + \\ & + 8y^3\left[x(xz-y) - (xz-y)\cos\left((xz-y)\left(x+2y^4+z^{17}\right)\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}F(x,y,z) = {}& x^3e^z + \\ & + x\left[x - \cos((xz-y)(x+2y^4+z^{17}))(x+2y^4+z^{17}) + x(x+2y^4+z^{17})\right] + \\ & + 17z^{16}\left[-\cos((xz-y)(x+2y^4+z^{17}))(xz-y) + x(xz-y)\right]\end{aligned}$$

   Nadrovina je pak dána předpisem $x + 0y + 0z$.

4. $$(0,-4,2),\ \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{8}(32+\sqrt{2}), 2\right),\ \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{8}(-32+\sqrt{2}), 2\right)$$

Jedna implicitní funkce

5. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Teorie:

VĚTA (O implicitní funkci)
Nechť $n \in \mathbb{N}$. Nechť Ω je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^{n+1}$, $F : \Omega \to \mathbb{R}$. Nechť je funkce F třídy $\mathcal{C}^1(\Omega)$. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $[x_0, y_0] \in \Omega$. Nechť jsou splněny následující podmínky:

(1) $F(x_0, y_0) = 0$,

(2) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existují okolí U_x bodu x_0 ($x_0 \in U_x \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$) a okolí bodu y_0 U_y ($y_0 \in U_y \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}$) tak, že

$$\forall x \in U_x \, \exists! y \in U_y : \; F(x, y) = 0.$$

Označíme-li navíc toto y jako $\varphi(x)$, pak $\varphi : U_x \to U_y$ je funkce třídy $\mathcal{C}^1(U_x)$, která splňuje vztah

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

pro $x \in U_x$ a $j \in \{1, \dots, n\}$.

Příklady:

1. Je dán vztah $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1$ a bod $[2, 0]$:

   a) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $y = f(x)$ v jistém okolí bodu 2, pro kterou platí $f(2) = 0$.

   b) Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě 2.

   c) Spočtěte $f''(2)$.

   $*$ d) Pro které body $[a, 0]$, $a \in \mathbb{R}$ lze dokázat tvrzení analogické a)?

2. Je dán vztah $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0$ a bod $[0, 1]$.

   a) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $y = f(x)$ v jistém okolí bodu 0, pro kterou platí $f(0) = 1$.

   b) Dokažte, že funkce f roste v jistém okolí bodu 0.

   c) Je funkce f na okolí 0 konvexní nebo konkávní?

3. Je dán vztah $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ a bod $[1, -2, 1]$:

   a) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $z = z(x, y)$ v jistém okolí U bodu $[1, -2]$, pro kterou platí $z(1, -2) = 1$.

   b) Určete $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ v okolí U.

   c) Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = z(x, y)$ v bodě $[1, -2]$.

4. Dokažte, že množina bodů $[x, y, z] \in \mathbb{R}^3$ které splňují vztah

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$$

   je v okolí bodu $[1, 1, 1]$ popsatelná jako graf funkce $f(x, y)$ definované na jistém okolí bodu $[1, 1]$, pro kterou je $f(1, 1) = 1$. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[1, 1]$.

Vícero implicitních funkcí

6. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Teorie:

VĚTA (O implicitních funkcích)

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Nechť Ω je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^{n+m}$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Nechť je funkce F třídy $\mathcal{C}^1(\Omega)$. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$, $[x_0, y_0] \in \Omega$. Nechť jsou splněny následující podmínky:

(1) $F(x_0, y_0) = 0$,

(2)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}(x_0, y_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial F_m}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(x_0, y_0) \end{vmatrix} \neq 0, \text{ kde } |J| \text{ značí determinant matice } J.$$

Pak existují okolí U_x bodu x_0 ($x_0 \in U_x \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$) a okolí bodu y_0 U_y ($y_0 \in U_y \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$) tak, že

$$\forall x \in U_x \; \exists! y \in U_y : \; F(x, y) = 0.$$

Označíme-li navíc toto y jako $\varphi(x)$, pak $\varphi : U_x \to U_y$ je funkce třídy $\mathcal{C}^1(U_x)$.

POZNÁMKA

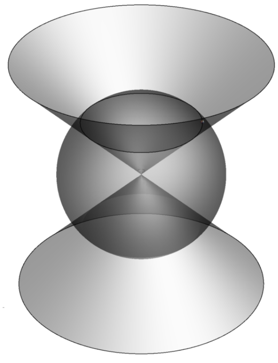
Determinant matice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je roven $ad - bc$.

Příklady:

1. Ukažte, že soustava rovnic

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$
$$x^2 + y^2 = z^2$$

určuje v jistém okolí bodu $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ jednoznačně funkce $x = x(y)$ a $z = z(y)$ splňující $x(0) = z(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Spočtěte první derivace těchto dvou funkcí v bodě 0. Lze teď něco říct o monotonii funkcí $x(y)$, $z(y)$ na nějakém okolí bodu 0? Je funkce x na okolí nuly konkávní?



2. Je dán vztah $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ a bod $[1, -2, 1]$:

   a) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $z = z(x, y)$ v jistém okolí U bodu $[1, -2]$, pro kterou platí $z(1, -2) = 1$.

   b) Určete $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ v okolí U.

   c) Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = z(x, y)$ v bodě $[1, -2]$.

3. Dokažte, že množina bodů $[x, y, z] \in \mathbb{R}^3$ které splňují vztah

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$$

   je v okolí bodu $[1, 1, 1]$ popsatelná jako graf funkce $f(x, y)$ definované na jistém okolí bodu $[1, 1]$, pro kterou je $f(1, 1) = 1$. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[1, 1]$.

4. Ukažte, že následující soustavy rovnic určují v jistém okolí zadaného bodu $[x_0, y_0, u_0, v_0]$ implicitně zadané funkce u, v (proměnných x a y). Spočítejte obě první parciální derivace těchto funkcí v bodě $[x_0, y_0]$. Bude-li se vám chtít, určete rovnici tečné nadroviny.

   a) Bod $[1, 0, 1, 0]$,

$$\begin{aligned} x &= u \cos\left(\frac{v}{u}\right), \\ y &= u \sin\left(\frac{v}{u}\right). \end{aligned}$$

   b) Bod $\left[e + 1, e, 1, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{aligned} x &= e^u + u \sin v, \\ y &= e^u - u \cos v. \end{aligned}$$

   c) Bod $[1, 2, 0, 0]$,

$$\begin{aligned} xe^{u+v} + 2uv &= 1, \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} &= 2x. \end{aligned}$$

Extrémy funkcí více proměnných I

7. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Teorie:

VĚTA

Nechť K je kompaktní (tj. uzavřená a omezená) podmnožina $\mathbb{R}^n$. Nechť f je spojitá funkce z K do $\mathbb{R}$. Pak f nabývá na K svého minima i maxima.

VĚTA (Lagrangeova věta o multiplikátoru)

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Nechť f a g jsou funkce z $\mathcal{C}^1(\Omega)$. Budiž

$$M := \{[x, y] \in \Omega \colon \; g(x, y) = 0\},$$

a nechť $[x_0, y_0] \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(I)

$$\nabla g(x_0, y_0) = 0, \text{ neboli}$$
$$\frac{\partial}{\partial x} g(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} g(x_0, y_0) = 0.$$

(II) Existuje reálné číslo λ splňující

$$\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = 0, \text{ neboli}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial}{\partial x} g(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial}{\partial y} g(x_0, y_0) = 0.$$

Tomuto λ se pak říká Lagrangeův multiplikátor.

Příklady:

Nalezněte globální extrémy funkce f na množině M:

1. $f(x,y) = x + y,\ M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2 + y^2 \leq 1\}$
2. $f(x,y,z) = xyz,\ M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3\colon\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
3. $f(x,y) = e^x,\ M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2 + 2y^2 \leq 1\}$
4. $f(x,y,z) = \sin(x)\sin(y)\sin(z),\ M = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3\colon\ x + y + z = \frac{\pi}{2},\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\right\}$
5. $f(x,y) = x^2 + y,\ M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\colon\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$
6. $f(x,y,z) = xy^2z^3,\ M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3\colon\ x + 2y + 3z = a,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$, kde $a > 0$.
7. $f(x,y) = x,\ M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\colon\ 2 \geq x \geq 0,\ 1 \geq y \geq 0,\ 2x + y \leq 2\}$
8. $f(x,y) = x + y,\ M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\colon\ x^3 + y^3 - 2xy = 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$
9. $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + z,\quad M = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$
10. $f(x,y) = y,\ M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\colon\ (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0\}$
11. $f(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b},\ a > 0, b > 0,\ M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2 + y^2 \leq 1\}$
12. $f(x,y) = x^2 + y,\ M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\colon\ 4y^3 - 4y + x^2 = 0,\ y \geq 0\}$

Extrémy funkcí více proměnných II

8. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Teorie:

VĚTA (Lagrangeova věta o multiplikátoru)
Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Nechť f a g jsou funkce z $\mathcal{C}^1(\Omega)$. Budiž

$$M := \{[x, y] \in \Omega\colon\ g(x, y) = 0\},$$

a nechť $[x_0, y_0] \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(I)

$$\nabla g(x_0, y_0) = 0, \text{ neboli}$$
$$\frac{\partial}{\partial x} g(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} g(x_0, y_0) = 0.$$

(II) Existuje reálné číslo λ splňující

$$\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = 0, \text{ neboli}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial}{\partial x} g(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial}{\partial y} g(x_0, y_0) = 0.$$

Příklady:

Nalezněte globální extrémy funkce f na množině M:

1. $f(x, y) = x^2 + y,\ M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\colon\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$

* 2. $f(x, y, z) = xy^2z^3,\ M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3\colon\ x + 2y + 3z = a,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$, kde $a > 0$.

3. $f(x, y) = x,\ M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\colon\ 2 \geq x \geq 0,\ 1 \geq y \geq 0,\ 2x + y \leq 2\}$

4. $f(x, y) = x + y,\ M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\colon\ x^3 + y^3 - 2xy = 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$

5. $f(x, y, z) = (x + y)^2 + (x - y)^2 + z,\quad M = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

6. $f(x, y) = y,\ M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\colon\ (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0\}$

7. $f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b},\ a > 0, b > 0,\ M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

8. $f(x, y) = x^2 + y,\ M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\colon\ 4y^3 - 4y + x^2 = 0,\ y \geq 0\}$

Extrémy funkcí více proměnných III

9. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Teorie:

VĚTA (Lagrangeova věta o multiplikátorech)
Nechť n a m jsou přirozená čísla. Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Nechť $g_1, g_2, \dots, g_m$ a f jsou funkce z $\mathcal{C}^1(\Omega)$. Budiž

$$M := \{z \in \Omega\colon\ g_1(z) = 0, \dots, g_m(z) = 0\},$$

a nechť $z_0 \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(I) Vektory $\nabla g_1(z_0), \nabla g_2(z_0), \dots \nabla g_m(z_0)$ jsou lineárně závislé.

(II) Existuje reálná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ splňující

$$\nabla f(z_0) + \lambda_1 \nabla g_1(z_0) + \lambda_2 \nabla g_2(z_0) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(z_0) = 0.$$

Příklady:

Není-li řečeno jinak, pak určete sup a inf funkce f na množině M, a vyšetřete, zdali se těchto hodnot nabývá.

1. Určete rozměry vodní nádrže ve tvaru kvádru o objemu $32\,\mathrm{m}^3$ tak, aby dno a stěny měly dohromady nejmenší povrch.

2. $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$

   a) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3\colon\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
   b) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3\colon\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0\}$

3. $f(x,y,z) = xyz$

   a) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3\colon\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
   b) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3\colon\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0\}$

4. $f(x,y,z) = \sin(x)\sin(y)\sin(z)$

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3\colon\ x + y + z = \frac{\pi}{2},\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}.$$

5. $f(x,y,z) = xy^2z^3$

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3\colon\ x + 2y + 3z = a,\ x > 0,\ y > 0\}, \text{ kde } a > 0$$

∗ 6. $f(x_1,\dots,x_n) = x_1^p + \cdots x_n^p$

$M = \{[x_1,\dots,x_n] \in \mathbb{R}^n\colon\ x_1 + \cdots + x_n = a,\ x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$, kde $a > 0$, $p > 0$ a $n \geq 2$

Matice I - hodnost, inverze

10. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Teorie:

Definice

Elementární řádkovou úpravou matice rozumíme jednu z následujících operací:

(i) Záměna dvou řádků.

(ii) Vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem.

(iii) Přičtení násobku jednoho řádku k druhému.

Definice

Hodností matice A rozumíme počet nenulových řádku po transformaci na schodovitou matici (převedení do odstupňovaného tvaru), značíme ji $h(A)$.

Tvrzení

(a) Každou matici lze pomocí elementárních řádkových úprav převést na schodovitou matici.

(b) $h(A) = h(A^T)$.

(c) Pro čtvercovou matici $A \in M(n \times n)$ je ekvivalentní:

  (i) A je regulární (neboli existuje matice inverzní).

  (ii) A lze pomocí elementárních úprav převést na jednotkovou matici.

  (iii) $h(A) = n$.

  (iv) A má nenulový determinant.

Příklady:

1. Určete hodnost matic (v závislosti na parametru) a rozhodněte, zdali se jedná o matici regulární:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & 15 & 12 & 25 & 42 \\ 2 & 5 & 4 & 8 & 14 \\ 1 & -1 & 2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2(a-1) & (3a+1) & a \\ (1-a) & -2 & -1 \\ a & 2a & a \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2(a-1) & (3a+1) & a & 2a \\ (1-a) & -2 & -1 & 2 \\ a & 2a & a & a+1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 7 & -2 & 2 & -10 \\ 7 & -1 & 1 & -9 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & -1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 1 & 2 & a \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & a & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Najděte inverzní matice k následujícím maticím:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 7 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$*$ 3. Na základě výsledků předchozích příkladů napište inverzní matice k maticím, které vzniknou:

a) Přehozením prvního a druhého řádku v matici z příkladu 2. a).

b) Vynásobením čtvrtého řádku matice z příkladu 2. c) číslem 11.

c) Přičtením sedminásobku třetího řádku k prvnímu řádku v matici z příkladu 2. b).

d) Z matice v příkladu 2. d) tak, že místo prvního řádku napíšeme trojnásobek druhého a místo druhého pětinásobek prvního.

Matice I - hodnost, inverze

10. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Výsledky:

1. a) 3

   b) 3

   c) 3 pro $a \neq 1$, 1 pro $a = 1$

   d) 3 pro $a \notin \{0, -1, 2\}$, 2 jinak

   e) 3 pro $a \neq -1$, 2 pro $a = -1$

   f) 3

   g) 4 pro $a \neq 1$, 3 pro $a = 1$

2. a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 & 1/6 \\ 1/2 & 5/6 & 1/6 \\ -1/2 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} 0 & -1/21 & 5/42 & 11/42 \\ -1/2 & 23/42 & -5/42 & 5/21 \\ -1/2 & 13/42 & -1/42 & 1/21 \\ 1/2 & -5/42 & 1/21 & -25/42 \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

3. Inverzní matice vzniknou z inverzní matice k původní matici

   a) přehozením prvního a druhého sloupce;

   b) vynásobením čtvrtého sloupce číslem 1/11;

   c) odečtením sedminásobku prvního sloupce od třetího sloupce;

   d) tak, že místo prvního sloupce napíšeme 1/3 druhého a místo druhého sloupce 1/5 prvního.

   (To vše lze zdůvodnit například s použitím definice inverzní matice a definice maticového násobení. Jiná, méně přímá možnost je vhodně použít větu o násobení a transformaci.)

Matice II - soustavy rovnic, determinant

11. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Příklady:

1. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right)$.

2. Vyřešte soustavu danou maticí $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 14 \end{pmatrix}$ s vektory pravých stran:

   (a) $b_1 := (1, 6, 8)^T$

   (b) $b_2 := (0, 8, 0)^T$

   (c) $b_3 := (1, 18, 28)^T$

3. Spočtěte následující determinanty:

   (a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 7 & -2 & 2 & -10 \\ 7 & -1 & 1 & -9 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & -1 & 2 & -7 \end{vmatrix}$

   (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

   (c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

   (d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 7 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

   (e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

   (f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

   (g) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$

* 4. Určete, čemu se rovná determinant matice, která vznikne:

   (a) z matice v příkladu 3 (b) přerovnáním řádků v pořadí 2,3,1;

   (b) vynásobením matice v příkladu 3 (c) číslem -1;

   (c) přerovnáním sloupců v matici z příkladu 3 (d) v pořadí 4,2,1,3;

   (d) vynásobením matice z příkladu 3 (g) číslem 1/100;

   (e) součinem matic z příkladu 3 (d) a 3 (e);

   (f) jako $A^T AB$, kde A je matice z příkladu 3 (a) a B matice z příkladu 3 (f);

5. Najděte řešení soustav lineárních rovnic:

(a) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y = 1 \\ -y + z = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x - z = -2 \\ -x + y = 1 \\ 2x + y + 3z = 13 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 7x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 15 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_4 = -1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 6x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 25x_4 = 42 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 14 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -7 \end{cases}$

6. Pro které pravé strany má soustava se stejnou maticí jako v příkladu 5 (e) řešení?

7. Najděte všechna reálná čísla a, b, c, pro která mají matice $A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & a \\ 1 & 3 & b & 5 \\ 5 & 4 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & -4c & 7 \end{pmatrix}$ a $B := \begin{pmatrix} 1 & 2a & 3 \\ 11c & 7 & -8b \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ stejný determinant.

8. Najděte všechny matice X, které komutují s maticí $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, neboli takové matice X, že $XA = AX$.

Výsledky:

1. $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

2. (a) $(-4, 1, 1)^T$
   (b) $(-4, 2, 0)^T$
   (c) $(-22, 4, 5)^T$

3. (a) Neexistuje (není čtvercová)
   (b) 1
   (c) 6
   (d) -84
   (e) 1
   (f) 0
   (g) -29400000

$*$ 4. (a) 1
   (b) -6
   (c) -84
   (d) -29
   (e) -84
   (f) 0

5. (a) $(5, -3, -2)$
   (b) $(1, 2, 3)$
   (c) $(1, 0, 2, 0)$
   (d) $(5, -3, 3, 6)$
   (e) $(-3 - 2t, 4, t, 0),\ \ t \in \mathbb{R}$

6. Právě pro $\left(\frac{b+d}{7}, b, c, d\right)$

7. $\det(A) = -16ab - 44ac + 4a + 74b + 216c - 6$, $\det(B) = -7 + 72b - 16ab + 297c - 44ac$, řešení $c = \frac{1}{81}(1 + 4a + 2b)$.

8. $\begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{b}{2} & a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d - 2c & -2c \\ c & d \end{pmatrix}$

Řady s nezápornými členy

12. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Teorie:

VĚTA (Nutná podmínka konvergence)
Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

VĚTA (Srovnávací kritérium)
Nechť posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ splňují, že $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ 0 \leq a_n \leq b_n$. Potom platí následující implikace:

- $\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje}\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}\right)$
- $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverguje}\right)$

VĚTA (Limitní srovnávací kritérium)
Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a nechť posloupnosti nezáporných čísel $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ splňují $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$. Potop platí:

- Je-li $c \in (0, \infty)$, pak $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje}\right)$.
- Je-li $c = 0$, pak $\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje}\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}\right)$.
- A je-li $c = \infty$, pak $\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverguje}\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}\right)$.

VĚTA (Cauchyovo odmocninové kritérium)
Nechť je $\{a_n\}$ libovolná posloupnost. Potom platí, že:

- $\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje absolutně}\right)$
- $\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}\right)$

VĚTA (d'Alambertovo podílové kritérium)
Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost nenulových čísel. Potom platí:

- $\left(\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje absolutně}\right)$
- $\left(\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}\right)$

VĚTA (Leibnizovo kritérium)
Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost jdoucí k nule ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$). Pak $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.

TVRZENÍ
Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje, právě když $\alpha > 1$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje, právě když $q \in (-1, 1)$.

Příklady:

Vyšetřete konvergenci následujících řad s nezápornými členy v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7n^2-13n+8}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+2}}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} n^a e^{-n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^{2n+1}}{(-\sqrt{3})^{2n}}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n-1}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{2^n+3^n}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\log a}$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\log n}$

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

(o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}+2n}{n^2+2n^3}$

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{7}\right)^n$

(q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+7}-\sqrt[3]{n^2+3}}{\sqrt[4]{n}}$

(r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^a}$

Řady s obecnými členy

13. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Teorie:

VĚTA (Nutná podmínka konvergence)
Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

VĚTA (Srovnávací kritérium)
Nechť posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ splňují, že $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ 0 \leq a_n \leq b_n$. Potom platí následující implikace:

- $\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje}\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}\right)$
- $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverguje}\right)$

VĚTA (Limitní srovnávací kritérium)
Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a nechť posloupnosti nezáporných čísel $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ splňují $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$. Potop platí:

- Je-li $c \in (0, \infty)$, pak $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje}\right)$.
- Je-li $c = 0$, pak $\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje}\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}\right)$.
- A je-li $c = \infty$, pak $\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverguje}\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}\right)$.

VĚTA (Cauchyovo odmocninové kritérium)
Nechť je $\{a_n\}$ libovolná posloupnost. Potom platí, že:

- $\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje absolutně}\right)$
- $\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}\right)$

VĚTA (d'Alambertovo podílové kritérium)
Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost nenulových čísel. Potom platí:

- $\left(\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje absolutně}\right)$
- $\left(\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}\right)$

VĚTA (Leibnizovo kritérium)
Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost jdoucí k nule ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$). Pak $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konverguje.

TVRZENÍ
Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje, právě když $\alpha > 1$.
Řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje, právě když $q \in (-1, 1)$.

Příklady:

Vyšetřete konvergenci následujících řad s nezápornými členy v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+1}{2n+100}\right)^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-1)^n 2^n n}{4^n+(-1)^n n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+3n+4}{2n^2+4}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+3n+4}{2n^3}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n+3n+4}{2n^4+3}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^n$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} x^n$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$

(o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \frac{1}{n}$

(q) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) \arcsin \frac{1}{n}$

(r) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2\pi) \left(\sqrt{n+9} - \sqrt{n}\right)$

$*$ (s) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{(n^{-2})}+\tan\left(\frac{n}{n^3+1}\right)-1}{\sin\left(\pi-\frac{1}{n}\right)} \cdot \left(n^2 - n^2 \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$