Matice II - soustavy rovnic, determinant

11. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Příklady:

1. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right)$.

2. Vyřešte soustavu danou maticí $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 14 \end{pmatrix}$ s vektory pravých stran:

   (a) $b_1 := (1, 6, 8)^T$

   (b) $b_2 := (0, 8, 0)^T$

   (c) $b_3 := (1, 18, 28)^T$

3. Spočtěte následující determinanty:

   (a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 7 & -2 & 2 & -10 \\ 7 & -1 & 1 & -9 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & -1 & 2 & -7 \end{vmatrix}$

   (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

   (c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

   (d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 7 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

   (e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

   (f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

   (g) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$

$*$ 4. Určete, čemu se rovná determinant matice, která vznikne:

   (a) z matice v příkladu 3 (b) přerovnáním řádků v pořadí 2,3,1;

   (b) vynásobením matice v příkladu 3 (c) číslem -1;

   (c) přerovnáním sloupců v matici z příkladu 3 (d) v pořadí 4,2,1,3;

   (d) vynásobením matice z příkladu 3 (g) číslem $1/100$;

   (e) součinem matic z příkladu 3 (d) a 3 (e);

   (f) jako A^TAB, kde A je matice z příkladu 3 (a) a B matice z příkladu 3 (f);

5. Najděte řešení soustav lineárních rovnic:

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & 2y & - & z & = 1 \\ 2x & + & 3y & & & = 1 \\ & - & y & + & z & = 1 \end{array}\right.$ (b) $\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & & & - & z & = -2 \\ -x & + & y & & & = 1 \\ 2x & + & y & + & 3z & = 13 \end{array}\right.$

(c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = -5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = 0 \\ 7x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = 15 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = -3 \end{array}\right.$

(d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = 2 \\ x_1 & & & & & - & x_4 & = -1 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & & & = -1 \end{array}\right.$

(e) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = 5 \\ 6x_1 & + & 15x_2 & + & 12x_3 & + & 25x_4 & = 42 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & = 14 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_4 & = -7 \end{array}\right.$

6. Pro které pravé strany má soustava se stejnou maticí jako v příkladu 5 (e) řešení?

7. Najděte všechna reálná čísla a, b, c, pro která mají matice $A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & a \\ 1 & 3 & b & 5 \\ 5 & 4 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & -4c & 7 \end{pmatrix}$ a $B := \begin{pmatrix} 1 & 2a & 3 \\ 11c & 7 & -8b \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ stejný determinant.

8. Najděte všechny matice X, které komutují s maticí $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, neboli takové matice X, že $XA = AX$.

Výsledky:

1. $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

2. (a) $(-4, 1, 1)^T$
   (b) $(-4, 2, 0)^T$
   (c) $(-22, 4, 5)^T$

3. (a) Neexistuje (není čtvercová)
   (b) 1
   (c) 6
   (d) -84
   (e) 1
   (f) 0
   (g) -29400000

* 4. (a) 1
   (b) -6
   (c) -84
   (d) -29
   (e) -84
   (f) 0

5. (a) $(5, -3, -2)$
   (b) $(1, 2, 3)$
   (c) $(1, 0, 2, 0)$
   (d) $(5, -3, 3, 6)$
   (e) $(-3 - 2t, 4, t, 0),\ t \in \mathbb{R}$

6. Právě pro $\left(\frac{b+d}{7}, b, c, d\right)$

7. $\det(A) = -16ab - 44ac + 4a + 74b + 216c - 6$, $\det(B) = -7 + 72b - 16ab + 297c - 44ac$, řešení $c = \frac{1}{81}(1 + 4a + 2b)$.

8. $\begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{b}{2} & a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d - 2c & -2c \\ c & d \end{pmatrix}$